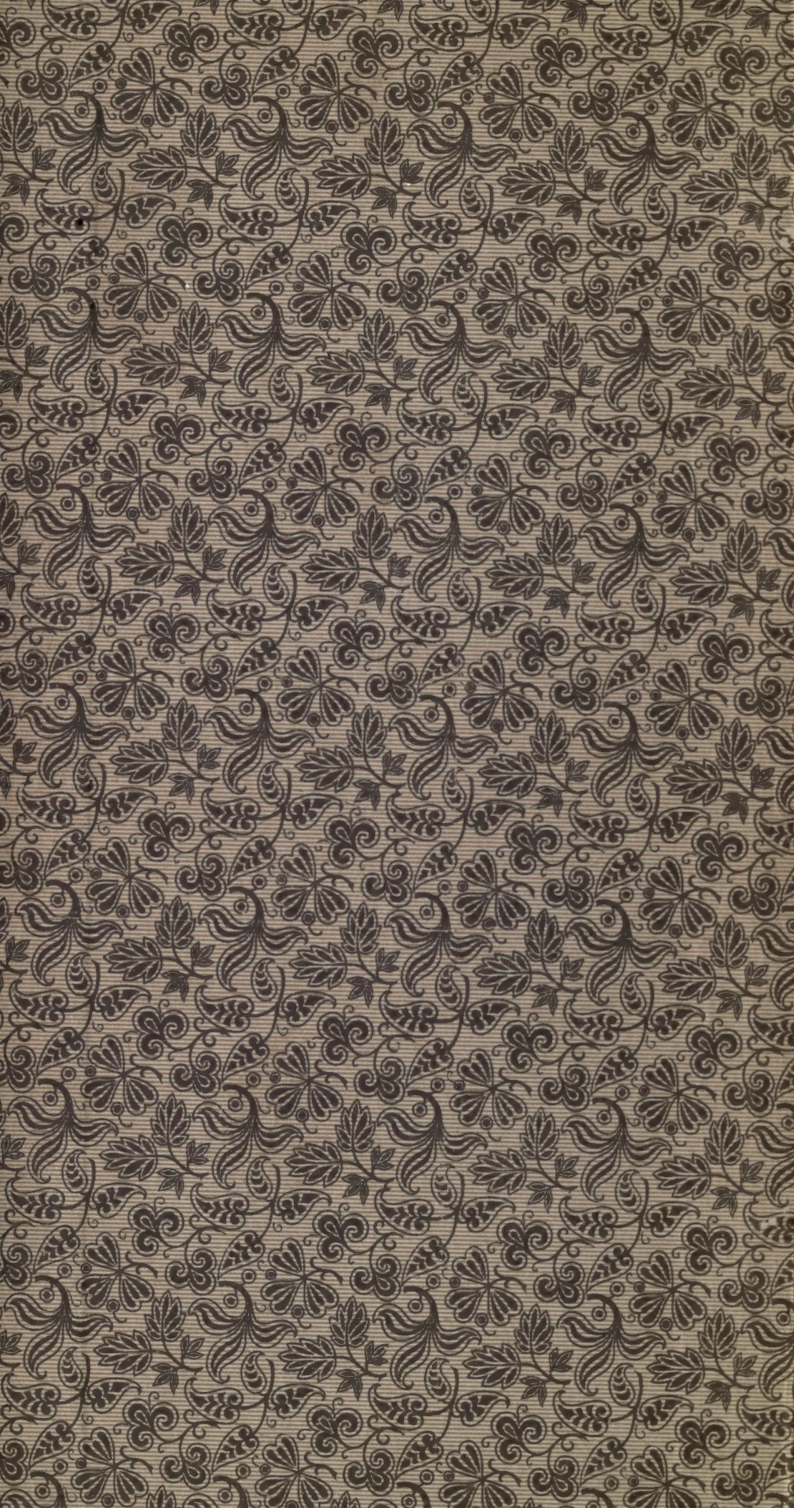

3 1761 07550751 7





Die
Holzmeßkunst
in ihrem ganzen Umfange.

Für

Forst- und Landwirthschaft, Holzhandel, Fabrik- und Bauwesen,

bearbeitet von

M. R. Preßler und **Max Kunze**

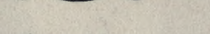
K. S. Hofrath u. Professor K. S. Oberförster u. Docent

an der Königlich Sächsischen Forstakademie Tharand.

Zweiter Band:
Lehrbuch der Holzmeßkunst

von

Max Kunze.



Berlin.

Verlag von Wiegandt & Hempel.

Buchhandlung für Land- und Forstwirthschaft.

1873.

Lehrbuch

der

Holzmeßkunst.

Von

Max Kunze

Königl. Sächs. Oberförster und Docent der Mathematik und Vermessungskunde an der Forstakademie Tharand.

Mit 44 in den Text eingedruckten Figuren in Holzschnitt.

Berlin.

Verlag von Wiegandt & Hempel

Buchhandlung für Land- und Forstwirthschaft.

1873.

Seinem Freunde

Herrn Oberforstrath Dr. Judeich

gewidmet

vom

Verfasser.

Vorwort.

Schon vor längerer Zeit faßte ich den Entschluß, das Gesammtgebiet der Holzmeßkunst oder wenigstens einzelne Theile derselben zu bearbeiten, und begann demgemäß nicht nur die Literatur zu durchmustern, sondern auch bezügliche Untersuchungen im Walde selbst anzustellen. Bei dem großen Zeitaufwande, welchen solche Untersuchungen erfordern, würde aber für die Veröffentlichung meiner Arbeit das Horazische „nonum prematur in annum" wahrscheinlich wörtlich in Erfüllung gegangen sein, wenn nicht wiederholte Aufforderungen mich endlich bewogen hätten, mit meinen nach Form und Inhalt noch gleich unvollkommenen Untersuchungen schon jetzt hervorzutreten.

Freilich haben durch diese vorzeitige Veröffentlichung viele Theile meines Buches keine oder nur eine unvollständige Begründung durch den Versuch erhalten: es würden, wenn Untersuchungen vorgelegen hätten, einige Paragraphe wahrscheinlich etwas anders bearbeitet, andere vielleicht gar nicht aufgenommen worden sein.

Lange habe ich geschwankt, ob ich G. Heyer's schöne Untersuchungen über die Anwendbarkeit des mittleren Modellstammes zur Bestandesmassenermittelung aufnehmen solle oder nicht. Da diese Untersuchungen aber in einem leicht zugänglichen Werkchen niedergelegt sind, und ich jetzt nicht einmal im Stande gewesen wäre dieselben in einem anderen Gewande darzustellen, so habe ich endlich von deren Aufnahme abgesehen.

Tharand, im Februar 1873.

Kunze.

Inhalt.

Einleitung.

Erster Theil.
Die Berechnung des Holzgehaltes einzelner Bäume.

Erstes Capitel.
Die Berechnung des Holzgehaltes gefällter Hölzer.

Erster Abschnitt.
Die Instrumente und Hülfstafeln.

Zweiter Abschnitt.
Die Berechnung des Holzgehaltes gefällter Hölzer.

Zweiter Theil.

Die Berechnung des Holzgehaltes ganzer Bestände.

Erster Abschnitt.

Die Ermittelung des Holzgehaltes ganzer Bestände durch Schätzung.

Zweiter Abschnitt.

Die Berechnung des Holzgehaltes ganzer Bestände durch stammweise Aufnahme.

Dritter Theil.

Die Berechnung des Zuwachses.

Einleitung.

Erstes Capitel.

Die Berechnung des Zuwachses einzelner Bäume.

Berichtigungen.

Seite	Zeile	statt	lies
20	17	st	ist
26	26	wid	wird
30	10	$\frac{1}{n_3}$	$\frac{1}{n^2}$
32	9	$\frac{x}{2}$	$p\frac{x}{2}$
35	14	÷	+
43	14	früher	früher,
58	5	$\sqrt[3]{Gg^2+g}$	$\sqrt[3]{Gg^2}+g$
85	21	Fälle	Fälle,
	22	Höhenmesser	Höhenmesser,
105	15	Nonius	Nonius am Höhenkreise
118	19	die in oben	in die oben
143	36	mißt	und mißt
		noch	nach
		a'_1	a'_1 ·
182	19	1	1a)
	31	2	1b)
194	20	nur	nun

Einleitung.

§. 1.

Begriff der Holzmeßkunst.

Die Holzmeßkunst oder forstliche Stereometrie ist derjenige Theil der angewandten Mathematik, welcher nicht nur von einzelnen gefällten oder stehenden Bäumen und deren Theilen, sondern auch von ganzen Beständen den Cubicinhalt finden lehrt; welcher ferner Anleitung giebt zur Berechnung des Zuwachses, d. h. derjenigen Holzmasse, um welche die Bäume und Bestände durch den alljährlich sich anlegenden Holzring innerhalb einer gewissen Zeit zunehmen.

Um diese Ziele zu erreichen, benutzt die Holzmeßkunst die zur Ermittelung des Inhaltes von Körpern überhaupt gebräuchlichen Methoden. Diese sind theils geometrische, theils physikalische, theils beide vereint. Die Ersteren bestimmen den Inhalt dadurch, daß sie die Bäume und deren Theile als geometrische Körper oder wenigstens als Körper betrachten, welche geometrischen nahe kommen, sodann die Maßzahlen der zur Berechnung dieser Körper nöthigen Dimensionen (Länge und Dicke) ermitteln, und endlich diese Maßzahlen in die für die gewählten Körper geltenden Inhaltsformeln einsetzen. Von den physikalischen Methoden beruht die eine darauf, daß ein in eine Flüssigkeit eingetauchter Körper eine seinem Inhalte gleiche Flüssigkeitssäule verdrängt. Mißt man nun auf geeignete Weise diese Flüssigkeitssäule, so erhält man dadurch zugleich den Inhalt des eingetauchten Baumtheiles. Es können aber auch noch die beiden Sätze der Physik, nämlich: das Volumen eines Körpers ist gleich dem Quotienten aus der Maßzahl seines Gewichtes dividirt durch die Maßzahl seiner Dichtigkeit; und: bei ein und demselben Körper

verhalten sich die Volumina wie ihre Gewichte, zu Inhaltsbestimmungen benutzt werden.

Da jede dieser Methoden die Anwendung von Instrumenten erfordert, so gehört die Kenntniß der Einrichtung und des Gebrauches dieser Instrumente gleichfalls zur Aufgabe der Holzmeßkunst.

Die Einheit des Körpermaßes ist der Cubicmeter. Die Holzmeßkunst wird daher den Inhalt der Bäume und Bestände, so wie deren Zuwachs, gleichfalls in Cubicmetern anzugeben haben. Da aber einzelne Baumtheile in besondere Schicht- oder Raummaße (Klaftern ꝛc.) eingelegt werden, welche gewöhnlich Parallelepipede von 1 Cubicmeter Raum bilden, so muß, weil diese Raummaße nur einen aliquoten Theil des Cubicmeters an Holzmasse enthalten, in diesem Falle unterschieden werden zwischen Cubicmeter „Raum" und Cubicmeter „feste Masse", kurz zwischen Raumcubicmeter (Raummeter) und Festcubicmeter (Festmeter). Alle Angaben über Holzmassen müssen natürlich in Festcubicmetern ausgedrückt werden, um unter einander vergleichbar zu sein. Unter Cubicmetern ohne weiteren Beisatz sollen im Folgenden immer Festcubicmeter verstanden werden.

Die Holzmeßkunst ist für alle Zweige der Forstwirthschaft von höchster Wichtigkeit, für einzelne derselben unentbehrlich. Mit ihrer Hülfe wird es uns möglich den jährlichen Hiebssatz unserer Wälder zu bestimmen, den Inhalt der gefällten und aufgearbeiteten Hölzer zu berechnen und einen Theil der Unterlagen zu beschaffen, deren wir zur Bestimmung des Werthes unserer Waldungen bedürfen.

§. 2.

Uebersicht der wichtigsten Literatur.

Die Holzmeßkunst bildet fast in jedem Lehrbuche der Forsttaxation den Inhalt eines besonderen Capitels. Die Journalliteratur zeichnet sich gleichfalls durch eine ziemliche Reichhaltigkeit aus, doch sind hervorragende Arbeiten in ihr bis zur Mitte dieses Jahrhunderts nur spärlich zu finden, da die meisten Artikel sich mit der Beschreibung bereits wieder in Vergessenheit gerathener Baumhöhenmesser und mit der Discussion einiger Baumcubirungsformeln beschäftigen.

Das erste größere selbstständige Werk war Hoßfeld's praktische Stereometrie, dem sich später würdig König's Forstmathematik und Smalian's Holzmeßkunst anreihten. Von neueren Arbeiten sind besonders zu erwähnen Riecke's lichtvolle Darstellung der Cubirung unbeschlagener Baumstämme, Gustav Heyer's noch

nicht genug gewürdigte Untersuchungen über die Ermittelung der Masse der Holzbestände, Draudt's vorzüglich praktisches Verfahren zur Berechnung der Holzmasse der Bestände, endlich Preßler's Arbeiten über Richtpunkts- und Zuwachslehre. Als Lehrbuch für die gesammte Holzmeßkunst ist dasjenige von Baur zu empfehlen.

Im Folgenden sind nur die wichtigsten selbstständigen Werke aufgeführt, da die benutzten Quellen überall im Texte angegeben sind.

Baur, Franz. Anleitung zur Aufnahme der Bäume und Bestände nach Masse, Alter und Zuwachs. Mit 43 dem Texte eingedruckten Holzschnitten. Wien, 1861. Wilhelm Braumüller. 8.

Breymann, Karl. Anleitung zur Waldwerthberechnung, sowie zur Berechnung des Holzzuwachses und nachhaltigen Ertrages der Wälder. Wien, 1855. Wilhelm Braumüller. 8.

— — Tafeln für Forst-Ingenieure und Taxatoren. Mit zwei lithografirten Tafeln. Wien, 1859. Wilhelm Braumüller. 8.

— — Anleitung zur Holzmeßkunst, Waldertragsbestimmung und Waldwerthberechnung. Mit 3 in den Text gedruckten Holzschnitten. Wien, 1868. Wilhelm Braumüller. 8.

Draudt, August. Die Ermittelung der Holzmassen. Mit drei lithographirten Tabellen. Gießen 1860. Verlag von Ernst Heinemann. 8.

Hartig, Theodor. Vergleichende Untersuchungen über den Ertrag der Rothbuche im Hoch- und Pflanz-Walde, im Mittel- und Niederwald-Betriebe, nebst Anleitung zu vergleichenden Ertragsforschungen. Im Anhange: Ertragstafeln von J. C. Paulsen und G. L. Hartig; Kreisflächen-, Secanten-, Tangenten- und Reductions-Tabellen. Mit Illustrationen in Holzschnitt. Berlin. Verlag von Albert Förstner. 1847. 4.

— — Kubik-Tabellen für geschnittene, beschlagene und runde Hölzer, Kreisfläche-Tabellen für Durchmesser und für Umfang, Geld-, Potenz- und Reductions-Tabellen nebst einer Anleitung zur Messung liegender und stehender Bäume. Zehnte, für das metrische System bearbeitete und durch Geldtabellen für die neue österreichische Währung vermehrte Auflage. Mit Holzschnitten. Berlin. Nicolaische Verlagsbuchhandlung 1871. 8.

Heyer, Eduard. Ueber Messung der Höhen, so wie der Durchmesser der Bäume im Allgemeinen, besonders aber bei forststatischen Untersuchungen, nebst einleitenden Bemerkungen über Bildung der Massen- und Ertragstafeln. Mit drei lithographirten Tafeln. Gießen, J. Riecker'sche Buchhandlung. 1870. 8.

Heyer, Gustav. Ueber die Ermittlung der Masse, des Alters und des Zuwachses der Holzbestände. Mit 19 lithographischen Tafeln. Dessau 1852. Druck und Verlag von Moritz Katz. 8.

Heyer, Karl. Anleitung zu forststatischen Untersuchungen; verfaßt im Auftrag der Versammlung süddeutscher Forstwirthe (zu Darmstadt 1845). Mit 2 lithographirten Tafeln und zahlreichen Hilftabellen. Giesen. J. Ricker'sche Buchhandlung. 1846. 4.

Hoßfeld, Wilhelm. Niedere und höhere praktische Stereometrie oder kurze und leichte Messung und Berechnung aller regel- und unregelmäßigen Körper, und selbst der Bäume im Walde, nebst einer gründlichen Anweisung zur Taxation des Holzgehaltes einzelner Bäume und Bestände und ganzer Wälder, besonders für Forstmänner, Baukünstler und Tech-

niker bearbeitet. Mit 6 Kupfertafeln und 8 Tabellen. Leipzig, in der Weidmann'schen Buchhandlung. 1812. 4.

Klauprecht, J. L. Die Holzmeßkunst. Karlsruhe, 1842. Verlag von A. Bielefeld. 8. — Zweite verbesserte und vermehrte Auflage mit Tabellen und eingedruckten Holzschnitten. 1846.

König, G. Anleitung zur Holztaxazion, ein Handbuch für jeden Forstmann und Holzhändler. Mit 14 Formularen, 152 Tafeln und 1 Höhenmesser. Gotha, in der Becker'schen Buchhandlung 1813. 8.

— — Die Forst-Mathematik mit Anweisung zur Forstvermessung, Holzschätzung und Waldwerthberechnung, nebst Hülfstafeln für Forstschätzer. Gotha, in Commission der Becker'schen Buchhandlung. 1835. 8. — Fünfte, wesentlich vermehrte Auflage von Dr. C. Grebe. Gotha. Verlag von E. F. Thienemann. 1864.

Preßler, Max Robert. Der Meßknecht, ein ungemein einfaches, geführliches, billiges und mannichfaltig anwendbares Meß- und Berechnungs-Instrumentchen. Zugleich mit Erläuterungen über den Gangloff'schen Holzberechnungsstock. Mit 49 in den Text eingedruckten Holzschnitten und einer besondern auf Pappe und Kattun aufgezogenen Tafel in Futteral, das zum praktischen Gebrauche vollständig eingerichtete Instrument darbietend. Braunschweig, Verlag von Friedrich Vieweg und Sohn. 1852. 8. — Dritte Auflage. 1862.

— — Neue holzwirthschaftliche Tafeln. Ein mit mehrfachen Erleichterungen und Vervollkommnungen verbundenes rein praktisches Taschenbuch für Forstleute, Landwirthe, Holzhändler, Bauherren, Baugewerken, Staats- und Communalwirthe und Alle, welche an der Erzeugung oder Benutzung der Hölzer ein besonderes Interesse haben. Dresden, Verlag von Woldemar Türk. 1857. 8. — Die zweite Auflage dieses Werkes führt den Titel: Forstliches Hülfsbuch für Schule und Praxis nach neuerem Stande der Wissenschaft und Erfahrung in Tafeln und Regeln zur Erleichterung und Vervollkommnung holzwirthschaftlicher und verwandter Rechnungs-, Messungs-, Schätzungs- und Betriebs-Arbeiten mit besonderer Rücksicht auf einen nationalökonomisch und forsttechnisch möglichst rationellen Reinertragswaldbau. Dresden. Wold. Türk's Verlagshandlung 1869. 8.

Püschel, Alfred. Die Baummessung und Inhaltsberechnung nach Formzahlen und Massentafeln nebst Zusammenstellung der über die Formzahlen der Waldbäume vorliegenden Erfahrungen. Bearbeitet unter Zugrundelegung der neuen metrischen Maße für Forstwirthe und Holzhändler. Leipzig: F. A. Brockhaus. 1871. 8.

Riecke, Friedrich. Ueber die Berechnung des körperlichen Inhalts unbeschlagener Baumstämme. Ein Programm, ausgegeben bei Gelegenheit der Jahresprüfung an der Königl. württembergischen land- und forstwirthschaftlichen Akademie zu Hohenheim den 30. August 1849. Stuttgart. 8.

Smalian, H. L. Beitrag zur Holzmeßkunst. Mit VII Beilagen, worunter zwei Steindruck-Zeichnungen. Stralsund, Verlag der C. Löffler'schen Buchhandlung. 1837. 8.

Stahl. Massentafeln zur Bestimmung des Holzgehaltes stehender Bäume, nebst Anleitung, den Masseninhalt liegender und stehender Bäume, so wie ganzer Holzbestände zu ermitteln. Mit 2 Steindrucktafeln und vielen Tabellen. Rüdersdorf bei Berlin. Im Selbst-Verlage des Verfassers. 1852. 8.

§. 3.

Eintheilung der Holzmeßkunst.

Die Aufgabe der Holzmeßkunst, welche wir in §. 1. dargelegt haben, giebt unmittelbar die Eintheilung des Stoffes. Derselbe zerfällt darnach in die Berechnung des Holzgehaltes einzelner Bäume und ganzer Bestände, und in die Berechnung des Zuwachses. Der erste Theil ist wiederum zu trennen in die Cubirung gefällter Hölzer und ihrer Theile, und in die Inhaltsermittelung stehender Bäume.

Erster Theil.

Die Berechnung des Holzgehaltes einzelner Bäume.

Erstes Capitel.

Die Berechnung des Holzgehaltes gefällter Hölzer.

Erster Abschnitt.

Die Instrumente und Hülfstafeln.

§. 4.

Die Instrumente der geometrischen Cubirungsmethoden.

Jede geometrische Körperberechnung erfordert zu ihrer Ausführung die Kenntniß gewisser Dimensionen der Körper. Die in der forstlichen Stereometrie vorkommenden Körper, welche einer geometrischen Berechnung unterliegen können, sind der Schaft oder die Spindel des Baumes, d. h. der oberirdische Theil desselben mit Ausschluß der Aeste. Dieser Schaft ist bekanntlich im Allgemeinen so geformt, daß alle Flächen senkrecht zu seiner Axe Kreisflächen sind oder der Kreisform wenigstens sehr nahe kommen. Die beiden Dimensionen der Breite und Dicke sind mithin einander gleich und fallen in eine zusammen, nämlich in den Durchmesser dieser Kreisflächen. Die dritte Dimension ist die Länge. Da die Durchmesser der Kreisflächen meistens nicht unmittelbar durch Auflegen eines Maßstabes auf die Fläche selbst gemessen werden können, so bedarf man zweier verschiedenen Arten von Instrumenten, solcher zum Messen der Durchmesser und solcher zum Messen der Längen.

§. 5.

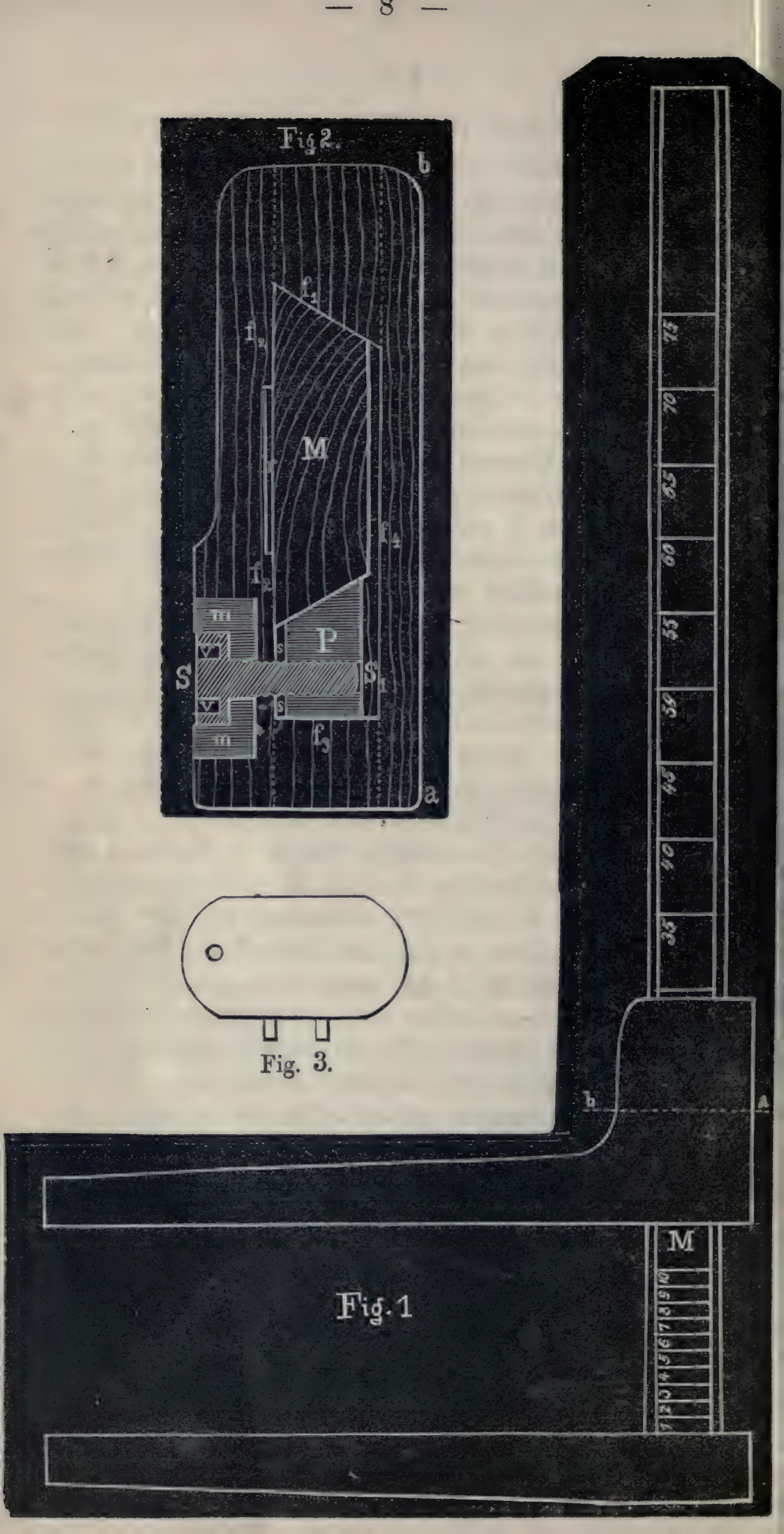
Die Instrumente zum Messen der Durchmesser.

1. Die Kluppe. Mit diesem von Hoßfeld*) in die Holzmeßkunst eingeführten Namen bezeichnet man ein Instrument, das in seiner einfachsten Gestalt aus einem parallelepipedischen Maßstabe von Holz besteht, an dessen einem Ende ein Schenkel rechtwinkelig so angebracht ist, daß dessen innere Fläche verlängert durch den Nullpunkt der Theilung des Maßstabes geht. Ferner läßt sich ein zweiter beweglicher Schenkel an dem Maßstabe so verschieben, daß er in jeder Stellung gleichfalls senkrecht zu dem letzteren ist. Legt man nun den feststehenden Schenkel an die eine Seite eines Baumes an, hält den Maßstab senkrecht zur Baumaxe und verschiebt dann den beweglichen Schenkel bis er den Baum berührt, so wird seine innere Fläche auf der Theilung den Durchmesser der durch die beiden Berührungspunkte gehenden kreisförmigen Querfläche des Baumes angeben.

In den Einzelheiten weichen die Kluppenconstructionen so sehr von einander ab, daß wir uns hier auf die Beschreibung zweier dieser Instrumente beschränken müssen.

a) Holzkluppe von Staudinger in Gießen. (Fig. 1. vordere Ansicht der ganzen Kluppe in $1/5$ der natürlichen Größe. — Fig. 2. Querschnitt durch den beweglichen Schenkel in der Richtung von a b der Fig. 1. in natürlicher Größe. — Fig. 3. der Schraubenschlüssel in natürlicher Größe. — Material: wilder Obstbaum). Der prismatische Maßstab M, dessen Querschnitt ein Paralleltrapez von 46 und 32^{mm} Seitenlänge und 12^{mm} Höhe ist, trägt auf der schmäleren der parallelen Seitenflächen die Theilung. Der bewegliche Schenkel ist mit einem weiten, die größere Breite des Maßstabes, so wie dessen Höhe übertreffenden Ausschnitte versehen. Auf der Seite f_1 (Fig. 2.) dieses Ausschnittes liegt die eine schiefe Seitenfläche des Maßstabes gänzlich auf, die breiteste Seite des letzteren dagegen nur an beiden Enden bei f_2 f_2, während die Mitte derselben über einer Rinne r läuft, um die Reibung zu vermindern. Die obere Seite des Maßstabes tritt mit der Seite f_4 des Ausschnittes in gar keine Berührung, es bleibt zwischen beiden vielmehr ein Zwischenraum von etwa $1{,}5^{mm}$. Der Raum zwischen der zweiten schiefen Fläche des Maßstabes und der Seite f_3 des Ausschnittes wird von einem Metallprisma P ausgefüllt, durch welches eine Schraube $S S_1$ hindurchgeht. Diese Schraube, welche auch die Seitenwand f_2 des Schenkels durchbohrt, ist mit ihrem Kopfe in eine Messingplatte m m eingelassen

*) Hoßfeld, Stereometrie. S. 58.


Fig 2.
b
f1
f2
M
f4
f2
m
P
v
S
s
S1
v
s
f3
m
a
Fig. 3.
75
70
65
60
55
50
45
40
35
b
a
M
10
9
8
7
6
5
4
3
2
1
Fig. 1

und kann durch einen in die Vertiefungen v v passenden Schraubenschlüssel (Fig. 3.) in der Richtung SS_1 bewegt werden, wodurch auch das Metallprisma P eine gleiche Bewegung erhält. Nahe an den beiden Enden von P, zwischen diesem und der Seite f_2 des beweglichen Schenkels, befinden sich in dem Raum s s zwei kleine Spiralfedern, welche mit der Schraube SS_1 ungefähr in einer Geraden liegen und ein Wenig in das Messingprisma P eingelassen sind. Diese Spiralfedern sind dazu angebracht, daß das Metallprisma P allen, auch den feinsten, Bewegungen der Schraube zu folgen vermag; sie verhindern ebenso sehr ein Festklemmen des Prisma beim Anziehen, wie ein Stehenbleiben desselben in der alten Stellung beim Lösen der Schraube.

Die Vorzüge dieser Kluppe vor anderen liegen auf der Hand. Bei jedem Temperatur- und Feuchtigkeitszustande der Luft, d. h. bei jedem Grade des Schwindens und Quellens des Holzes, kann der Gang des beweglichen Schenkels durch die Verstellung des Metallprisma durch die Schraube so regulirt werden, daß dieser Schenkel immer senkrecht gegen den Maßstab oder parallel zu dem festen Schenkel bleibt, und leicht auf dem Maßstabe hingleitet. Die Form des Maßstabes M und des Prisma P machen ferner eine seitliche Verschiebung des Maßstabes in dem beweglichen Schenkel fast unmöglich.*)

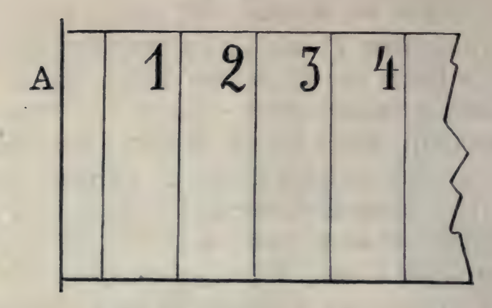
Für manche Arbeiten, z. B. für die Aufnahme der aufgearbeiteten Nutzhölzer oder der Holzmasse der Bestände, bei welchen die gemessenen Durchmesser in gewisse Klassen zusammengefaßt, d. h. abgerundet werden, kann man, damit die Arbeiter keine Fehler in der Abrundung zu begehen vermögen, die Maßstäbe der Kluppen so einrichten, daß sie diese Abrundung selbst ausführen.**) Will man z. B. alle Messungen auf ganze Centimeter abrunden, so braucht man den ersten Theilstrich nur in einem Abstande von 0,5 Cent vom Anfange A des Maßstabes zu ziehen (Fig. 4. d. f. S.), dann die Theilung von Cent zu Cent auszuführen und auf den Feldern zwischen den Theilstrichen die Zahlen 1, 2, 3, 4, . . . einzutragen. Die Ablesungen, welche in die mit 1, 2, 3, 4, . . . bezeichneten Felder fallen, gehören dann den Durchmessern 1, 2, 3, 4. . . . an.

Was die Genauigkeit der Kluppenmessung anlangt, um auch diesen Punkt gleich hier zu erwähnen, so wird dieselbe besonders durch die Beschaffenheit der Baumrinde (abblätternde

*) Die Beschreibung dieser und einer ähnlichen Kluppe nebst Abbildung findet sich bei Heyer, Ed. Ueber Messung der Höhen, sowie der Durchmesser. S. 51 u. f.

**) Nach dem Vorschlage von Ed. Heyer. Vergl. Allgem. Forst- und Jagdz. 1860. S. 210.

Fig. 4.



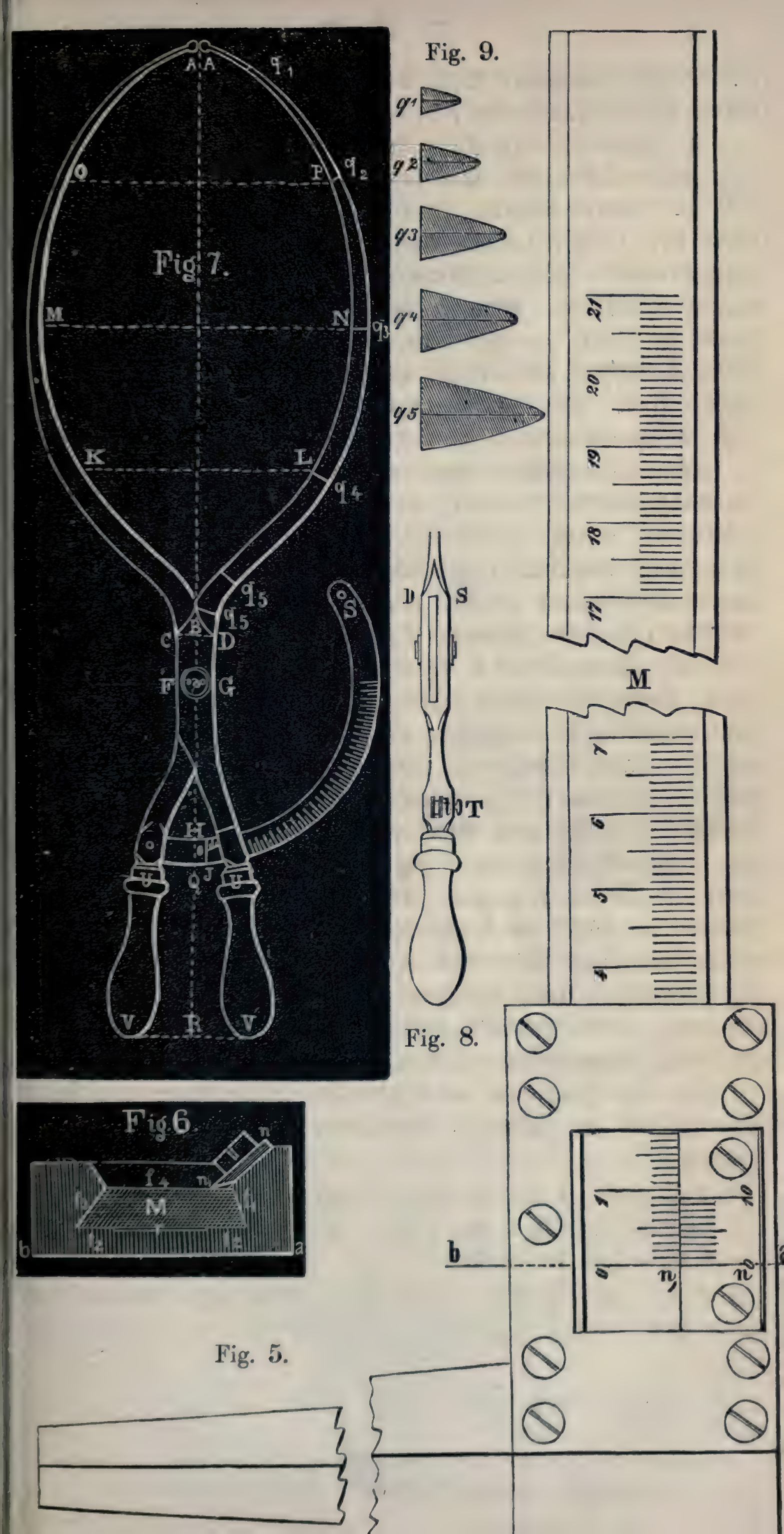
Borke, Moos- und Flechtenpolster) beeinflußt. Doch kann man gerade mit der Kluppe am leichtesten solchen störenden Einflüssen ausweichen.

Bei einigen von Robert Micklitz angestellten Untersuchungen *) betrug die Abweichung der aus der Kluppenmessung erhaltenen Kreisflächensumme von der durch unmittelbares Auflegen eines Maßstabes erhaltenen nur + 0,42 Procent der letzteren.

b) Metallkluppe von Staudinger in Gießen. (Fig. 5. vordere Ansicht derselben in natürlicher Größe. — Fig. 6. Querschnitt durch den beweglichen Schenkel in der Richtung von a b der Figur 5. — Material: Messing). Für wissenschaftliche Untersuchungen, besonders an schwachen Hölzern, reicht die Genauigkeit, welche Holzkluppen gewähren, nicht in allen Fällen aus, vielmehr sind dazu Metallkluppen erforderlich. Da die Ausdehnung aller Theile durch die Temperatur bei Metallen eine ganz gleichmäßige ist, so kann die Construction dieser letzteren Kluppen eine viel einfachere als die der hölzernen sein, indem der Maßstab **M** in den Ausschnitt des beweglichen Schenkels genau eingepaßt werden kann.

Der Maßstab hat bei dieser Kluppe gleichfalls einen paralleltrapezischen Querschnitt von 22 und 16^{mm} Seitenlänge und 5^{mm} Höhe; die Theilung desselben geht unmittelbar bis auf Millimeter. Der bewegliche Schenkel ist an seiner Oberseite mit einem rechteckigen Ausschnitte versehen, in welchem sich ein etwa unter 35 Grad gegen den Maßstab geneigter Nonius nn_1 (Fig. 5 und 6.) mit 0,1^{mm} Angabe befindet. Um die Reibung des Nonius auf dem Maßstabe möglichst zu verkleinern, ist die dem Maßstabe zugewendete Seite des Nonius bei n_1, messerartig zugeschärft, so daß sie den Maßstab nur mit dieser Schneide berührt. Um dagegen die Reibung des beweglichen Schenkels an dem Maßstabe zu vermindern, ist die Fläche f_2 des Schenkels,

*) Allgem. Forst- u. Jagdz. 1860. S. 108.


Fig. 9.
Fig 7.
Fig. 8.
Fig 6.
Fig. 5.
M
b

auf welcher die untere Seite des Maßstabes sich bewegt, mit einem flachen Ausschnitte r versehen.

2. Der Baumzirkel. Anstatt der Holzkluppe kann man auch einen Tasterzirkel oder sogenannten Baumzirkel anwenden. Die beste Form desselben ist diejenige, welche Preßler*) angegeben hat. (Fig. 7. vordere Ansicht des Zirkels in $1/_6$ der natürlichen Größe. — Fig. 8. Seitenansicht desselben. — Fig. 9. Querschnitte durch die Schenkel in natürlicher Größe.) Darnach besteht der Zirkel aus zwei gebogenen eisernen Stäben, welche bei einem Dritttheil ihrer Länge bei **F G** durch ein Gewerbe verbunden sind. Die Schenkel **A O M K B** und **A P N L B** sind nach statischen Gesetzen so geformt, daß sie bei möglichster Leichtigkeit die größte Stabilität besitzen. Es wird dies durch parabolische Zufeilung derselben erreicht, wie dies die Querschnitte in den Punkten q_1, q_2, q_3, q_4 und q_5, welche in Figur 9 in natürlicher Größe dargestellt sind, angeben.**) Die Enden dieser Schenkel laufen in cylindrische Knöpfe **A A** aus. Die von dem Gewerbe bei **F G** rückwärts liegenden Theile sind an ihren Enden mit hölzernen Handgriffen **U V** versehen. Außerdem ist an dem linken Theile ein eingetheilter Kreisbogen angebracht, dessen Mittelpunkt in dem Gewerbe bei **F G** liegt und der durch eine rechteckige Aushöhlung des rechten Theiles geht. Wenn der Zirkel geschlossen ist, so müssen sich die beiden Knöpfe **A A** berühren und die zum Ablesen der Theilung an dem rechten kurzen Schenkel angebrachte Inderplatte **J** muß auf den Nullpunkt der Theilung zeigen. Außerdem befindet sich an diesem Schenkel unterhalb des Kreisbogens eine Preßschraube **T** (Fig. 8.), welche durch eine Stoßscheibe t gegen die Scala drückt, so daß der Schenkel in jeder Stellung an dieser Scala festgestellt werden kann. Sein Heruntergleiten von der letzteren wird durch ein kleines Schräubchen s verhindert.

Die von Preßler a. a. O. für die Dimensionen der einzelnen Theile des Zirkels in Centimetern gegebenen Maße sind folgende:

AB = 38, **BE** = 9, **EQ** = 7, **QR** = 12, **UV** = 10.
OP = 17, **MN** = 21, **KL** = 15, **CD** = 3, **FG** = 2,2.
HQ = 1,5, **DS** = 1,2.

Die Querschnitte q_1 bis q_5 haben der Reihe nach Grundlinien von 3, 5, $6._5$, 8 und 9, und Höhen von 5, 8, 11, 13 und 16 Cent.

---

*) Neue holzwirthsch. Tafeln. 1857. S. 177, welchem Orte auch die Figuren 7—9 entlehnt sind.

**) Die Formeln, aus welchen die Maße dieser Querschnitte sich ergeben, finden sich in Preßler's polytech. Brieftasche. 3. Aufl. S. 122.

Will man mit dem Zirkel Baumdurchmesser messen, so hat man die Preßschraube zu lösen, so daß sich der rechte Schenkel sanft bewegen läßt und denselben so weit zu verschieben, daß die Entfernung der beiden Knöpfe A augenscheinlich etwas geringer ist als der abzugreifende Durchmesser. Drückt man nun den Zirkel sanft gegen den Stamm und zieht ihn ebenso zurück, so wird die Oeffnung der Schenkel dem Durchmesser des Stammes gleich werden müssen. Zu hüten hat man sich besonders vor einem Zusammendrücken der Schenkel. Man schützt sich davor, wenn man den Zirkel wo möglich nur mit einer Hand hält.

Gegenüber der Kluppe ist der Zirkel offenbar im Nachtheil. Erstens durch sein nicht unbedeutendes Gewicht, welches die Arbeiter leichter ermüdet, dann durch den größeren Zeitaufwand, welchen die Messungen mit ihm erfordern. Außer dem giebt er etwas zu kleine Resultate an; R. Micklitz *) fand bei seiner Anwendung einen Flächenfehler von — 3,24 Procent, was sich daraus erklärt, daß einmal selbst bei dem vorsichtigsten Messen ein geringes Federn der Schenkel stattfindet, und daß zweitens bei dem Zurückziehen des Zirkels der rechte Schenkel sich durch sein Gewicht leicht ein Wenig an der Scala zurückstellen kann.

3. Das Meßband. Da die Fläche des Kreises eine Function allein seines Umfanges ist, so kann man sich zur Ermittelung der Baumquerflächen auch des Umfanges derselben bedienen. Dieser wird gemessen durch das Meßband. Es ist dasselbe ein etwa 1,5 Cent breites leinenes oder hanfenes, gut gefirnißtes Band, welches auf einer Seite eine Theilung trägt. Um die Messung stehender Bäume mit demselben zu erleichtern, ist es an einem Ende mit einem Häkchen versehen, welches in die Rinde eingedrückt wird. Das andere Ende ist gewöhnlich an einem in der Axe einer ledernen, hölzernen oder metallenen Kapsel angebrachten drehbaren Cylinder befestigt, auf welchen es durch eine Kurbel aufgerollt werden kann. Auf der zweiten Seite des Bandes ist häufig und mit Vortheil noch die der Umfangstheilung entsprechende Durchmessertheilung aufgezeichnet, welche man ohne Mühe aus der Gleichung

$$D = \frac{U}{\pi} = \frac{U}{3,14159},$$

oder aus der nicht ganz strengen

$$D = \frac{7\,U}{22}$$

berechnen kann, wo U den gegebenen Umfang, D den gesuchten Durchmesser bezeichnet.

*) Allgem. Forst- und Jagdz. 1860. S. 108.

Wenn auch das Meßband vor der Kluppe und dem Zirkel den Vortheil größerer Bequemlichkeit hat, da man es leicht in der Tasche mit sich führen kann, so ist es doch in anderer Beziehung gegen diese beiden Instrumente in entschiedenem Nachtheil. Da nämlich alle Baumquerflächen mehr oder minder von der Kreisform abweichen, also auch nicht von einem Durchmesser allein abhängen, so kann auch der Umfang nicht mehr als Function nur eines Durchmessers angesehen werden, und die aus dem gemessenen Umfange abgeleitete Fläche muß fehlerhaft werden. Ferner vermag man beim Gebrauche des Bandes viel weniger örtlichen Unregelmäßigkeiten auszuweichen als mit der Kluppe oder auch dem Zirkel. Vor allem ist der Gebrauch breiter Bänder die Quelle vieler Fehler, da sich diese des kegelförmigen Wuchses der Bäume wegen nicht an die Oberfläche der Stämme anschmiegen, sondern Falten bilden.

R. Micklitz*) erhielt bei der Messung mit dem Bande einen Flächenfehler von + 6,80 Procent. Schmidtborn**) maß an zwölf Scheiben die Umfänge mit Schnure und Draht, und fand bei der Schnurenmessung einen Flächenfehler von + 2,59 Procent, mit Schwankungen von + 0,11 bis + 8,77; bei der Drahtmessung einen solchen von + 3,44 Procent, mit Schwankungen von + 0,93 bis + 9,24.

Beim Gebrauche ist das Band genau senkrecht zur Axe des Baumes zu legen. Ferner muß die abzulesende Umfangstheilung auf der inneren Seite des Bandes sich befinden, weil sonst der Durchmesser um die doppelte Dicke des Bandes fehlerhaft erhalten würde.

An Stelle des Bandes bedient man sich auch hanfener Schnüre und kleingegliederter Ketten, doch sind die letzteren durchaus zu verwerfen.

§. 6.

Einfluß der Fehler der Durchmesser- und Umfangsmessung auf den Inhalt der Baumquerflächen.

Setzt man voraus, daß die Baumquerflächen genau kreisförmig seien und daß man beim Ablesen des Durchmessers D den Fehler Δ begehe, wo Δ sowohl positiv als negativ, d. h. wo D sowohl zu groß als zu klein gemessen sein kann, so erhält man statt der dem Durchmesser D zukommenden Kreisfläche

$$K = \frac{\pi}{4} D^2,$$

*) Allgem. Forst- u. Jagdz. 1860. S. 108.

**) Das. 1863. S. 408.

vielmehr die Kreisfläche

$$K_1 = \frac{\pi}{4} (D + \Delta)^2,$$

mithin einen Flächenfehler von

$$K_1 - K = x = \frac{\pi}{4} \left[(D + \Delta)^2 - D^2 \right] = \frac{\pi}{4} (2 D \Delta + \Delta^2).$$

Da Δ, noch mehr also Δ^2, immer nur eine sehr kleine Größe sein wird, so kann man Δ^2 ohne merklichen Fehler vernachlässigen, so daß

$$x = \frac{\pi}{4} \cdot 2 D \Delta \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad 1)$$

den Fehler in der Fläche ausdrückt, wenn Δ denjenigen des Durchmessers bezeichnet. Daraus folgt, daß bei gleichbleibenden Δ die Fehler in den Flächen proportional sind den Durchmessern, während die Flächenfehler für gleichbleibende Durchmesser und verschiedene Δ proportional den letzteren sind.

Hätte man z. B. einen Durchmesser von 10 Cent um $\pm$ 0,2 Cent falsch gemessen, so wäre der Fehler in der Fläche gleich $\pm \frac{\pi}{4} \cdot 2 \cdot 10 \cdot 0{,}2 = \pm 3{,}14159$ Quadratcent. Bei einem Durchmesser von 50 Cent giebt derselbe Durchmesserfehler einen Flächenfehler von $\frac{\pi}{4} \cdot 2 \cdot 50 \cdot 0{,}2 = 15{,}70796$ Quadratcent.

Mißt man anstatt des Durchmessers den Umfang U, so ist

$$K = \frac{U^2}{4 \pi}.$$

Begeht man dabei einen Fehler Ω, der wiederum sowohl positiv als negativ sein kann, so wird die diesem fehlerhaften Umfange entsprechende Kreisfläche

$$K_1 = \frac{(U + \Omega)^2}{4 \pi},$$

und

$$K_1 - K = x = \frac{(U + \Omega)^2 - U^2}{4 \pi} = \frac{2 U \Omega + \Omega^2}{4 \pi},$$

oder da Ω^2 seiner Kleinheit wegen vernachlässigt werden kann,

$$x = \frac{U \Omega}{2 \pi} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad 2)$$

aus welcher Gleichung wiederum folgt, daß die Fehler der Flächen bei gleichbleibenden Ω proportional den Umfängen wachsen, bei gleichbleibenden Umfängen und veränderlichen Ω aber proportional den letzteren.

Würde einem Fehler Ω der Umfangsmessung ein Fehler Δ der Durchmessermessung entsprechen, so hätte man, da

$$U + \mathfrak{L} - U = (D + \Delta)\,\pi - D\pi,$$
$$\mathfrak{L} = \Delta\,\pi$$

und

$$\Delta = \frac{\mathfrak{L}}{\pi},$$

d. h. es würden, wenn nicht andere Einflüsse das Verhältniß ins Gegentheil verkehrten, die Umfangsmessungen etwas mehr als 3mal genauer sein als die Durchmessermessungen.

Will man den Fehler der Fläche in Procenten p der wahren Kreisfläche K ausdrücken, so hat man das eine Mal dafür den Werth $\frac{p}{100}$ K, das andere Mal nach Gl. 1) und 2) den Werth $\varkappa$, und mithin

$$\frac{p}{100}\,K = \varkappa,$$

oder

$$p = \frac{\varkappa}{K}\,100.$$

Setzt man für $\varkappa$ und K ihre oben gefundenen Werthe ein, so erhält man für die Durchmessermessung

$$p = \frac{2\,D\,\Delta\,\frac{\pi}{4}}{D^2\,\frac{\pi}{4}}\,100 = \frac{\Delta}{D}\,200, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 3)$$

für die Umfangsmessung dagegen

$$p = \frac{U\,\mathfrak{L}}{2\,\pi}\,100 : \frac{U^2}{4\,\pi} = \frac{\mathfrak{L}}{U}\,200, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 4)$$

d. h. das Fehlerprocent ist umgekehrt proportional dem Durchmesser oder Umfange bei gleichen Durchmesser- oder Umfangsfehlern, dagegen direct proportional diesen Fehlern, wenn die Durchmesser oder Umfänge gleich sind.

Ist wieder wie oben D = 10, Δ = 0,2 Cent, so wird

$$p = \frac{0{,}2}{10}\,200 = 4 \text{ Procent},$$

während man für D = 50, Δ = 0,2 Cent,

$$p = \frac{0{,}2}{50}\,200 = 0{,}8 \text{ Procent}$$

erhält.

Wie schon erwähnt, muß man bei jeder Messung mit jedem Instrumente senkrecht zur Axe des Baumes messen und Rindenschuppen, Moos, Flechten ꝛc. an den Meßpunkten sorgfältig entfernen. Trotzdem bleiben immer noch das Resultat vergrößernde Einflüsse übrig, über deren Größe bei verschiedenen Holzarten noch nicht

genug Untersuchungen vorliegen, um sie genau beziffern und corrigiren zu können.

Die nicht kreisförmigen, also elliptischen oder ganz verzerrten Gestalten der Baumquerflächen pflegt man dadurch auf Kreisflächen zurückzuführen, daß man wenigstens zwei auf einander senkrecht stehende Durchmesser mißt und aus beiden Ablesungen das Mittel nimmt. Bei wissenschaftlichen Untersuchungen darf man sich mit dieser Zahl noch nicht begnügen. Denn nach den Untersuchungen von Schmidtborn*) scheint es, als ob man bei der Messung nur zweier Durchmesser in der Regel etwas zu große Resultate erhielte. So fand sich die Kreisflächensumme aus dem Mittel der größten und kleinsten Durchmesser um 1,40 Procent zu groß, mit Einzelabweichungen von — 0,02 bis + 4,71; die Mittel zweier beliebigen Durchmesser lieferten die Kreisflächensumme zu groß um 2,57 Procent, mit Einzelabweichungen von — 2,91 bis + 6,02.

§. 7.

Die Instrumente zum Messen der Längen.

1. **Die Latten.** Dieselben bestehen aus drei bis fünf Meter langen Stäben von geradfaserigem, gut ausgetrocknetem und zum Schutze gegen die Feuchtigkeit mit einem Firniß überzogenem Holze. Der Querschnitt derselben ist quadratisch oder rechteckig, die Breite der Seitenflächen schwankt zwischen 2 und 4 Cent. Zum Schutze gegen das Krummlaufen sind dieselben wohl auch aus zwei bis drei Stücken zusammengesetzt. Um das Bestoßen der Endflächen zu verhüten sind die letzteren mit Metall beschlagen, übrigens senkrecht gegen die Seitenflächen abgeschnitten. Auf der einen Seitenfläche erhalten die Latten eine Theilung, deren Theilstriche um 0,5 bis höchstens 0,1 Meter von einander abstehen. Noch kleinere Theile werden zweckmäßiger mit einem besonderen Stäbchen gemessen. Solcher Latten führt man wenigstens zwei mit sich. Beim Messen der Stämme werden dieselben dann genau in die Richtung der Axe des Baumes gebracht und sorgfältig mit zwei Endflächen an einander gestoßen. Streng genommen müßte man dieselben auch noch der Axe des Baumes parallel machen, etwa durch Unterschieben hölzerner Keile. Doch ist der Fehler, welchen man durch Auflegen der Stangen auf die gekrümmte Oberfläche des Baumschaftes begeht, so gering, daß man in den allermeisten Fällen die obige Vorsicht außer Acht lassen kann.

---

*) Allgem. Forst- u. Jagdz. 1863. S. 408.

Bezeichnet man nämlich die Länge einer Latte A B mit l, den ersten Durchmesser A E mit D_1, den zweiten B F mit D_2, wo $D_1 > D_2$ sein mag, so liegt das bei A befindliche Ende der Latte um $AC = \frac{D_1 - D_2}{2}$ höher als das bei B befindliche. In dem rechtwinkligen Dreiecke ABC ist dann, wenn noch $BC = \lambda$ gesetzt wird,

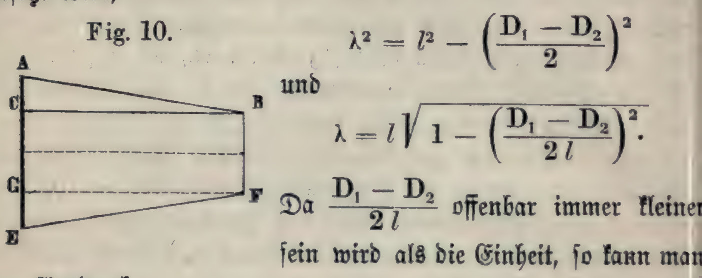


Fig. 10.

$$\lambda^2 = l^2 - \left(\frac{D_1 - D_2}{2}\right)^2$$

und

$$\lambda = l\sqrt{1 - \left(\frac{D_1 - D_2}{2\,l}\right)^2}.$$

Da $\frac{D_1 - D_2}{2\,l}$ offenbar immer kleiner sein wird als die Einheit, so kann man den Ausdruck

$$\sqrt{1 - \left(\frac{D_1 - D_2}{2\,l}\right)^2}$$

nach dem binomischen Satze entwickeln, und erhält denselben gleich

$$1 - \frac{1}{2}\left(\frac{D_1 - D_2}{2\,l}\right)^2 + \frac{1}{8}\left(\frac{D_1 - D_2}{2\,l}\right)^4 - \dots$$

oder, wenn man für die weitere Rechnung nur die ersten beiden Glieder beibehält, was verstattet ist,

$$\lambda = l - \frac{(D_1 - D_2)^2}{8\,l} \quad \dots\dots \quad 5)$$

Setzt man z. B. $l = 5$, $D_1 = 0{,}50$, $D_2 = 0{,}40$ Meter, so wird

$$\lambda = 5 - \frac{0{,}010}{40} = 5 - 0{,}00025$$

oder

$$\lambda = 4{,}99975 \text{ Meter.}$$

Der Fehler $l - \lambda$, welcher durch die geneigte Lage der Meßstange im vorliegenden Falle entstünde, würde daher 0,00025 Meter betragen und es würde, da die Differenz $D_1 - D_2 = 0{,}1$ Meter schon einen sehr extremen Fall bezeichnet, mit 5 Meter langen Meßlatten selbst im ungünstigsten Falle eine Genauigkeit von 1 : 20000 zu erreichen sein. Man wird somit in allen Fällen die Latten unmittelbar auf den Stamm auflegen dürfen.

2. **Das Meßband.** Bequemer als die Latten, weil leichter zu transportiren, ist das Meßband, welches sich von dem zum Messen der Durchmesser dienenden Bande bloß durch größere Länge (20 bis 30 Meter) und die Art der Theilung unterscheidet,

da es nur Abtheilungen von 0,5 bis 0,1 Meter erhält. Die ganzen Meter werden zweckmäßig durch rothe Ziffern kenntlich gemacht, oder es werden, was noch mehr zu empfehlen, die halben Meter abwechselnd schwarz und roth oder weiß und roth gefärbt. Des leichteren Gebrauches wegen wird das Band entweder auf einen hölzernen, durch eine Kurbel an seiner Axe drehbaren Rahmen aufgewunden, oder auch in eins der oben erwähnten ledernen, hölzernen oder metallnen Gehäuse eingeschlossen.

Nicht ganz so bequem als das Band ist

3. Die Meßkette von Messing- oder dünnem Eisendraht, mit 0,25 bis 0,2 Meter langen Gliedern.

Beim Gebrauche wird das Band oder die Kette, nachdem das eine mit einem Ringe versehene Ende mit einem Bohrer oder einer Holzschraube an dem Stamme befestigt ist, straff auf dem letzteren ausgespannt. Auf diese Weise mißt man zwar nicht die Länge der Axe des Stammes, sondern die Länge einer krummen Linie in der Oberfläche, der Fehler wird, wie eine leichte Rechnung zeigt, aber auch in diesem Falle nur gering sein. Setzt man den Stamm geradseitig voraus, und nennt die vom Bande angegebene Seitenlänge L, die Länge der Axe H, den unteren Durchmesser D_1, den oberen D_2, so hat man ebenso wie bei der Latte

$$H = \sqrt{L^2 - \left(\frac{D_1 - D_2}{2}\right)^2}$$

$$= L - \frac{(D_1 - D_2)^2}{8\,L}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 6)$$

oder wenn der Stamm nicht entwipfelt, also $D_2 = 0$ ist,

$$H = L - \frac{D^2}{8\,L} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 7)$$

Wäre $L = 30$, $D_1 = 0{,}8$ Meter, so hätte man

$$H = 30 - \frac{0{,}64}{240} = 30 - 0{,}0027$$

oder

$$H = 29{,}9973 \text{ Meter.}$$

Die Differenz $L - H$ ist also auch hier eine Größe, welche immer wird vernachlässigt werden können.

§. 8.

Einfluß der Fehler der Längen- und Durchmesser-Messungen auf den Inhalt der Baumschäfte.

1. Wie wir später sehen werden, kann der Inhalt V jedes Baumschaftes nach der Formel

$$V = \frac{\pi}{4} D^2 H f$$

berechnet werden, wo D den unteren Durchmesser, H die Länge des Schaftes und f einen gewissen, von der Baumform abhängigen Factor bedeutet, der z. B. bei der Walze = 1, beim geradseitigen Kegel $= \frac{1}{3}$ ist.

Wird daher beim Messen der Schaftlänge ein Fehler Θ begangen, der sowohl positiv als negativ sein kann, so erhält man statt des wahren Inhaltes

$$V = \frac{\pi}{4} D^2 H f$$

vielmehr den fehlerhaften

$$V_1 = \frac{\pi}{4} D^2 (H + \Theta) f,$$

oder einen Fehler im Inhalte von

$$V_1 - V = \Upsilon = \frac{\pi}{4} D^2 \Theta f, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 8)$$

so daß dieser Fehler proportional ist dem Fehler der Längenmessung.

Drückt man den Fehler im Inhalte in Procenten p des wahren Inhaltes aus, so hat man, da derselbe einmal gleich $\frac{p}{100} V$, das andere Mal gleich Υ st,

$$\frac{p}{100} V = \Upsilon$$

und

$$p = \frac{\Upsilon}{V} 100.$$

Führt man für Υ und V ihre obigen Werthe ein, so wird

$$p = \frac{\frac{\pi}{4} D^2 \Theta f}{\frac{\pi}{4} D^2 H f} 100 = \frac{\Theta}{H} 100 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 9)$$

Für $H = 20$, $\Theta = 0{,}4$ Meter, ist $p = \frac{0{,}4}{20} \cdot 100 = 2$ Procent. Man sieht aus diesen Zahlen, um wie viel mehr Fehler in der Durchmessermessung in's Gewicht fallen, als solche bei Längenmessungen.

2. Werden sowohl bei der Durchmesser- als bei der Längenmessung der Baumschäfte Fehler begangen, so resultirt aus diesen fehlerhaften Messungen ein Inhalt V_2, für welchen, wenn die Fehler bezüglich wieder Δ und Θ sind, der Ausdruck sich ergiebt

$$V_2 = \frac{\pi}{4} (D + \Delta)^2 (H + \Theta) f,$$

wo Δ sowohl wie Θ positiv oder negativ sein können. Daraus folgt

$$V_2 - V = \Upsilon_1 = \frac{\pi}{4} f \left[(D + \Delta)^2 (H + \Theta) - D^2 H\right]$$
$$= \frac{\pi}{4} f \left[2 D\Delta (H + \Theta) + \Delta^2 H + D^2\Theta + \Delta^2 \Theta\right].$$

Das Produkt $\Delta^2\Theta$ kann in allen Fällen vernachlässigt werden, es bleibt dann

$$\Upsilon_1 = \frac{\pi}{4} f \left[2 D\Delta (H + \Theta) + \Delta^2 H + D^2 \Theta\right] \quad . \quad . \quad 10)$$

als Gesammtfehler übrig. Soll auch dieser Fehler in Procenten des wahren Inhaltes ausgedrückt werden, so hat man

$$p = \frac{\Upsilon_1}{V} 100 = \frac{\frac{\pi}{4} f \left[2 D\Delta (H + \Theta) + \Delta^2 H + D^2 \Theta\right]}{\frac{\pi}{4} D^2 H f} 100,$$

und nach einigen leichten Reductionen

$$p = \left[\frac{2 \Delta (H + \Theta)}{D H} + \left(\frac{\Delta}{D}\right)^2 + \frac{\Theta}{H}\right] 100 \quad . \quad . \quad 11)$$

Wäre z. B. $D = 0{,}5$, $H = 25$ Meter, und hätte man den Durchmesser um $0{,}01^m$ zu groß, die Länge um 0,5 Meter zu kurz gemessen, so wäre in diesem Falle

$$p = \left[\frac{2 \cdot 0{,}01 \cdot 24{,}5}{0{,}5 \cdot 25} + \left(\frac{0{,}01}{0{,}5}\right)^2 - \frac{0{,}5}{25}\right] 100$$
$$= (0{,}0392 + 0{,}000004 - 0{,}02)\ 100$$
$$= 1{,}9204 \text{ Procent.}$$

3. Es ist noch von Interesse zu untersuchen, unter welchen Bedingungen die durch Längen- und Durchmesserfehler bedingten Inhaltsfehler einander gleich werden. Da für die Längenfehler das Fehlerprocent $\frac{\Theta}{H} 100$, für die Durchmesserfehler $\frac{2\Delta}{D} 100$, so muß dann

$$\frac{2\Delta}{D} 100 = \frac{\Theta}{H} 100$$

oder

$$\frac{\Delta}{D} = \frac{1}{2} \frac{\Theta}{H}$$

sein.

Wäre z. B. $\Delta = 0{,}01$, $D = 0{,}50$, $H = 25$ Meter, so wäre

$$\Theta = 2 \frac{0{,}01}{0{,}5} \cdot 25 = 1 \text{ Meter.}$$

Dagegen würde für $\Theta = 0,5$, $H = 25$, $D = 0,40$ Meter

$$\Delta = \frac{1}{2} \cdot \frac{0,5}{25} \cdot 0,4 = 0,004 \text{ Meter.}$$

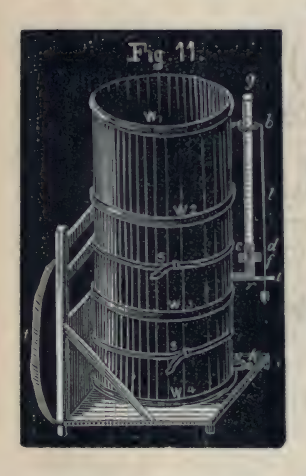
In dem ersten Beispiele würde mithin ein Längenfehler von 1 Meter erst denselben Einfluß ausüben wie ein Durchmesserfehler von 1 Cent; in dem zweiten würden 4 Millimeter, um welche der Durchmesser falsch gemessen worden wäre, denselben Fehler erzeugen, wie eine um 0,5 Meter fehlerhafte Länge.

§. 9.

Die Instrumente der physikalischen Cubirungs-Methoden.

1. Das Aichgefäß oder Xylometer. Wie schon erwähnt, kann man die Volumina der Körper auch dadurch bestimmen, daß man die Flüssigkeitssäule mißt, welche die Körper beim Eintauchen in ein mit Flüssigkeit gefülltes Gefäß verdrängen. Diese Messung geschieht am bequemsten auf folgende Weise.

Ein cylindrisches Gefäß von Zinkblech von etwa 1,25 bis 1,50 Meter Höhe und 0,5 bis 0,6 Meter Durchmesser wird der Haltbarkeit wegen und um zu verhüten, daß es seine kreiscylindrische Form verliere, mit mehreren Verstärkungswülsten w_1, w_2, w_3, w_4, (Fig. 11.) von Zink umgeben. Dieses Gefäß erhält über dem Boden ein kurzes, durch Stöpsel oder federnde Kappe k verschließbares Rohr a zum Ablassen des Wassers, und ein Stück darüber, vielleicht bei einem Drittheile der Höhe ein cylindrisches, knieförmig gebogenes, Messingrohr r. In die Oeffnung dieses Rohres wird eine Glasröhre g von 0,005 bis 0,010 Meter Weite mit Hülfe eines durchbohrten, das Rohr streng ausfüllenden Korkes wasserdicht eingesetzt. Besser noch ist es, die Glasröhre mit einer messingenen Fassung c zu versehen, welche in das Messingrohr r eingeschliffen ist, so daß, wenn ihr Rand d auf dem Rande f des Rohres r aufsitzt, wasserdichter Verschluß vorhanden ist. Bei dieser Einrichtung kann die Glasröhre bei weitem Transporte des Instrumentes abgenommen und in einem besonderen Futterale verwahrt werden. Die Glasröhre ist überdies noch einmal bei b in einem Blechringe mit Hülfe eines durchbohrten Korkes leicht befestigt. Setzt man die Glasröhre g



in der Röhre r mit einem Korke fest ein, so umgiebt man sie zum Schutze mit einem abnehmbaren Blechmantel, welcher oben durch zwei in Oesen greifende Haken, unten durch einen eingeschobenen Bolzen am Cylinder befestigt wird. An dem Blechringe b bringt man außerdem noch ein Pendel *l* an, welches durch eine an r angelöthete Platte mit dem Indexloche i geht.

Beim Transporte wird das Instrument auf einem mit zwei Tragbändern t versehenen Holzreffe durch zwei Riemen s festgehalten. Während des Gebrauches bleibt das Instrument gewöhnlich gleich auf diesem Gestelle stehen und wird durch Unterschieben von Holzkeilen auf demselben horizontal gestellt.

Um auf der Glasröhre eine Theilung auftragen zu können, versieht man die erstere mit einem oder zwei schmalen weißen Firnißstreifen, stellt sodann das Instrument horizontal, füllt Wasser in dasselbe, so daß dieses eben in der Röhre erscheint und bezeichnet diesen Punkt mit Null. Hierauf füllt man ein Litergefäß (= 0,001 Cubicmeter) mit Wasser, streicht dasselbe, da das Wasser eine gewölbte Oberfläche bildet mit einer mattgeschliffenen Glasplatte ab und gießt den Inhalt vorsichtig (um das Spritzen zu vermeiden) in den Cylinder aus. Nach jedem Einfüllen bemerkt man den Stand des Wassers an der Glasröhre und fährt auf die beschriebene Weise fort, bis die ganze Glasröhre getheilt ist. Um den Stand des Wassers besser erkennen zu können, kann man dasselbe schwach färben. Die Theilstriche werden zuerst mit Bleistift angegeben, dann aber mit schwarzem Firniß nachgezogen. Den Abstand der erhaltenen Theilstriche kann man mit Hülfe des Zirkels dann noch weiter theilen; beziffert wird jeder fünfte oder zehnte Theilstrich.

Soll der Inhalt eines Körpers mit Hülfe dieses Instrumentes bestimmt werden, so stellt man dasselbe fest und horizontal und füllt es zum Theil mit Wasser, dessen Stand man an der Röhre abliest. Dann taucht man den zu messenden Körper so tief ein, daß er ganz vom Wasser bedeckt ist und liest den Stand des Wassers wiederum an der Röhre ab. Die Differenz der beiden Ablesungen muß gleich dem Inhalte des eingetauchten Körpers sein. Zum Untertauchen der Holzstücke bedient man sich am zweckmäßigsten eines starken Drahtquirles, dessen Arme durch einen Drahtring verbunden sind. Eine andere Construction dieses Instrumentes ist von Theodor Hartig*) angegeben worden.

Zur Bestimmung des Cubicinhaltes sehr kleiner Holzstücke bedient man sich am besten enger cylindrischer Gläser, welche nahe am Boden durchbohrt sind. In diese Bohrung wird

---

*) Vergleich. Unters. über den Ertrag der Rothbuche. S. 10.

dann eine am unteren Ende rechtwinkelig gebogene Glasröhre eingekittet, welche gleichfalls auf die oben beschriebene Weise, nur entsprechend feiner, eingetheilt wird. Ist der Glascylinder hinreichend lang und eng, so können die Inhaltsbestimmungen kleiner Holzstücke mit derselben Schärfe ausgeführt werden, wie die größerer Stücke in größeren Gefäßen.

2. Die Wage. Für einen und denselben Körper verhalten sich bekanntlich die Volumina V, V_1 wie deren Gewichte Q, Q_1, oder es findet immer die Gleichung statt

$$V : V_1 = Q : Q_1,$$

woraus

$$V_1 = \frac{Q_1}{Q} V$$

folgt, wenn Q, Q_1 und V als bekannt angesehen werden können. Bestimmt man daher nach irgend einer Methode, z. B. geometrisch, das Volumen V eines Körpers, sowie dessen Gewicht, so wird man das Volumen eines gleichartigen Körpers finden können, wenn man allein dessen Gewicht bestimmt.

Hätte man z. B. $V = 0{,}05$ Cubicmeter, $Q = 60$, $Q_1 = 120$ Kilogramm, so wäre

$$V_1 = \frac{120}{60} \cdot 0{,}05 = 0{,}1 \text{ Cubicmeter.}$$

Statt der Gleichung

$$V_1 = \frac{Q_1}{Q} V$$

kann man auch den Ausdruck

$$V_1 = \frac{Q_1}{w\,s}$$

benutzen, in welchem w das Gewicht eines Cubicmeters Wasser und s das specifische Gewicht des Körpers V_1 bedeuten, und wo das letztere gegeben sein oder auf bekannte Weise ermittelt werden muß.

Auf die Anwendung dieser beiden Methoden zur Volumenbestimmung der Holzstücke werden wir weiter unten zurückkommen.

Zur Ermittelung der Gewichte bedient man sich der Wage. Bei forstlichen Untersuchungen benutzt man hauptsächlich drei Arten von Wagen, nämlich die Federwage, die römische Schnellwage und die Decimal- oder Brückenwage. Die erstere zeichnet sich durch ihre große Bequemlichkeit, sowohl beim Transport als beim Wiegen aus, die letztere erlaubt das gleichzeitige Wiegen sehr großer Massen bei großer Schärfe der Resultate. Beim Gebrauche hängt man die Federwage an drei pyramidal zusammengestellten und an dem Kreuzungspunkte durch eine Kette oder ein Seil verbundene Stangen auf. Die römische Schnellwage be-

festigt man am besten an einer in einen starken Stamm eingebohrten langen Holzschraube.

§. 10.

Die Hülfstafeln.

Bei den Baumcubirungen kommt es stets auf die Berechnung von Kreisflächen und auf die Multiplication der letzteren mit den Längen an. Zur Abkürzung und Sicherung der Rechnung hat man deshalb Kreisflächen- und Walzentafeln entworfen.

Die Kreisflächentafeln *) enthalten für alle, nach gewissen Abstufungen fortschreitende Durchmesser (oder Umfänge) die zugehörigen Kreisflächen, sie geben also für jedes D das Product $\frac{\pi}{4} D^2$. Für wissenschaftliche Untersuchungen sind diese Tafeln vollständig ausreichend, sie sind es dagegen nicht für die Bedürfnisse der Praxis. Diese verlangt noch Walzentafeln**), d. h. Tafeln, welche unmittelbar den Werth von $\frac{\pi}{4} D^2 H$ angeben, wenn man für die Durchmesser D sowohl als für die Längen H alle in der Natur vorkommenden Werthe nach gewissen zuläßigen Abstufungen einsetzt.

---

*) I. Bd. 1. Abth. Taf. 8.

Die umfänglichsten Tafeln dieser Art sind die von uns unter dem Titel „Siebenstellige Kreisflächen für alle Durchmesser von 0,01 bis 99,99. Dresden 1868. 4." herausgegebenen. Ueberdies ist zu empfehlen:

Seckendorff, Arthur von. Kreisflächentafel für Metermaß, zum Gebrauche bei Holzmasse-Ermittelungen. Leipzig 1870. 8. (Zugleich als Walzentafel zu benutzen.)

**) I. Bd. 1. Abth. Taf. 1. u. 2.

Die Zahl dieser Tafeln ist ungemein groß. Als recht brauchbar seien davon nur angeführt:

Blume, W. Kubik-Tabelle für runde Hölzer nach dem Metersysteme. Düsseldorf. 1869. 8.

Pabst, G., Tafeln zur Inhaltsbestimmung runder Hölzer nach dem mittleren Durchmesser nebst Tafeln zur kubischen Bestimmung behauener und geschnittener Hölzer im metrischen Maßsysteme. Gera 1870. 8.

Preßler, M. R. Forstliche Cubirungstafeln nach metrischem Maß zum Dienstgebrauche der Kgl. Sächs. Forstverwaltung. Leipzig. 1871. 8.

Thiele, Wilhelm. Tafeln zur Inhaltsbestimmung der Rundhölzer nach Kubikmetern. Dessau und Ballenstedt. 1871. 8.

Zweiter Abschnitt.

Die Berechnung des Holzgehaltes gefällter Hölzer.

§. 11.

Die Form des Baumschaftes.



Denkt man sich den Schaft eines Baumes von einer Ebene geschnitten, welche durch seine Axe CD (Fig. 11.), die im Allgemeinen mit dem Marke zusammenfällt, geht, so wird der Durchschnitt der Oberfläche des Baumschaftes mit dieser Ebene eine krumme Linie A A_1 A_2 C B_2 B_1 B, die sogenannte Schaftcurve sein. Betrachtet man diese letztere in Bezug auf die Axe des Baumes, also in Bezug auf die vom Marke gebildete gerade Linie, so zeigt sich, daß im Allgemeinen der links von der Axe gelegene Theil derselben A A_1 A_2 C mit dem rechts befindlichen B B_1 B_2 C gleichgestaltet ist; daß die Krümmung an der Spitze (von A_2 und B_2 bis C) in Folge der Einwirkung der Aeste am stärksten und ziemlich unregelmäßig ist, gegen die Mitte des Baumes zwischen A_1 A_2 und B_1 B_2 schwächer und sehr regelmäßig wid, gegen das Ende des Baumes hin, zwischen A A_1 und B B_1, eine entgegengesetzte Richtung annimmt. Denn während an der Spitze und in der Mitte die Curve gegen die Axe hohl (concav) ist, wird sie gegen das Ende hin erhaben (convex). Die Form der Schaftcurve ist mithin im Allgemeinen ∫-förmig.

Die bis jetzt ausgeführten Untersuchungen haben nun ergeben, daß die Formen der Schaftcurven ziemlich von einander abweichen und abhängig sind z. B. von dem Alter des Baumes, von der Höhe des Kronenansatzes, von der Stärke der Beastung ꝛc. Sie haben aber auch ergeben, daß unter gleichen Ver-

hältnissen erwachsene Stämme wenigstens nahe übereinstimmende Formen zeigen.

Denkt man sich die Schaftcurve um ihre Axe gedreht, so wird dieselbe den Mantel oder die Oberfläche, dagegen die Fläche AA_1A_2CD oder die ihr congruente BB_1B_2CD den Inhalt des Schaftes beschreiben. Behufs der Inhaltsberechnung betrachtet man den Schaft entweder in seiner ganzen Ausdehnung als regelmäßigen Körper, d. h. die Schaftcurve einem bestimmten Gesetze gehorchend, wie in den meisten Fällen der Praxis, oder man zerlegt sich denselben in kleinere Theile und sieht diese als bestimmten regelmäßigen Körpern nahe kommend an, wie bei der feineren Praxis und bei wissenschaftlichen Untersuchungen. Diese regelmäßigen Körper werden wir daher zunächst zu untersuchen haben.

Wenn auch, wie schon erwähnt, die bis jetzt vorliegenden Untersuchungen noch nicht dahin geführt haben, aus Messungen, welche an gewissen Punkten des Schaftes vorgenommen werden, das Krümmungsgesetz, oder, um in der Sprache der Analysis zu reden, die Gleichung der Schaftcurve ableiten zu können, so haben aus ihnen doch wenigstens diejenigen krummen Linien erkannt werden können, welchen die Schaftcurven, wenn nicht in ihrem ganzen Verlaufe, so doch längs gewisser Strecken nahe kommen. Es sind dies die unter einem gewissen Winkel gegen eine Axe geneigte gerade Linie, die Apollonische Parabel und die Parabelevolute, semicubische oder Neilische Parabel*). Demzufolge werden die Baumschäfte oder wenigstens kleinere Theile derselben als Umdrehungskörper der genannten Curven, d. h. als geradseitige Kegel, Paraboloide oder Neiloide angesehen werden können.

Jede ebene krumme Linie läßt sich, wie die analytische Geometrie lehrt, durch eine Gleichung zwischen zwei Unbekannten darstellen, wenn man die eine dieser Unbekannten x als Abscisse, die andere y als Ordinate der Curve ansieht. Bekanntlich wird die gerade Linie durch die Gleichung

$$y = p_1 x,$$

die Apollonische Parabel durch die Gleichung

$$y^2 = p_2 x,$$

und die Neilische Parabel durch die Gleichung

$$y^2 = p_3 x^3$$

dargestellt, wo p_1, p_2, p_3 constante Größen, die sogenannten Parameter, bezeichnen. Wir haben uns nun zunächst mit der Berechnung der Umdrehungskörper dieser Curven zu beschäftigen.

*) Nach dem englischen Mathematiker William Neil, geb. 1637, gest. 1670, welcher diese Curve 1657 rectificirte.

§. 12.

Der geradseitige Kegel.

1. Die elementare Stereometrie lehrt, daß der Inhalt des geradseitigen Kegels ist

$$V = \frac{\pi}{12} D^2 H \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 1)$$

wo D den Durchmesser der Grundfläche, H die Höhe des Kegels bezeichnet, oder, wenn man die kreisförmigen Grundfläche gleich G setzt,

$$V = \frac{1}{3} G H \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 2)$$

Denkt man sich in der Mitte der Länge des Kegels einen Durchmesser δ gemessen, dem die Kreisfläche γ entsprechen mag, so ist nach dem Bildungsgesetze dieses Körpers

$$\delta : D = \frac{1}{2} H : H = 1 : 2$$

oder

$$D^2 = (2\,\delta)^2,$$

mithin

$$V = \frac{\pi}{3} \delta^2 H \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 3)$$

oder

$$V = \frac{4}{3} \gamma H \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 4)$$

2. Der Inhalt des abgestutzten geradseitigen Kegels findet sich zu

$$v = \frac{\pi}{12} (D^2 + D d + d^2)\, h, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 5)$$

wenn D und d die Durchmesser der parallelen Endflächen G und g, h die Höhe des Stumpfes bezeichnen. Durch Einführung der Endflächen geht diese Formel über in

$$v = \frac{1}{3} \left(G + \sqrt{Gg} + g\right) h. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 6)$$

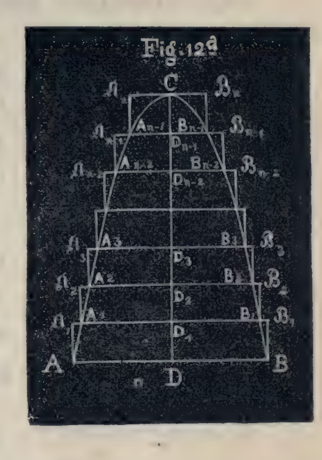
Als Function allein des Mittendurchmessers läßt sich der Inhalt des Stumpfes nicht ausdrücken.

§. 13.

Das Paraboloid.

1. Schneidet man durch eine Gerade AB, senkrecht zur Axe C D der Parabel (Fig. 12a), ein Stück der Parabelfläche ab und dreht es um seine Axe, so wird dasselbe den Parabelkegel

oder das Paraboloid beschreiben. Jeder Querschnitt des letzteren senkrecht zur Axe muß natürlich ein Kreis sein. Theilt man die Höhe C D = x dieses Körpers in n Theile und legt durch jeden dieser Theilpunkte eine Ebene, so wird das Paraboloid in $n-1$ scheibenförmige Körper $A\,A_1\,B_1\,B$, $A_1\,A_2\,B_2\,B_1$, $A_2\,A_3\,B_3\,B_2$, ... $A_{n-2}\,A_{n-1}\,B_{n-1}\,B_{n-2}$ und ein kleines Paraboloid $A_{n-1}\,C\,B_{n-1}$ zerlegt. Construirt man nun über der kreisförmigen Grundfläche jeder dieser Scheiben Cylinder $A\,\mathfrak{A}_1\,\mathfrak{B}_1\,B_1$, $A_1\,\mathfrak{A}_2\,\mathfrak{B}_2\,B_1$, $A_2\,\mathfrak{A}_3\,\mathfrak{B}_3\,B_2$, ... $A_{n-2}\,\mathfrak{A}_{n-1}\,\mathfrak{B}_{n-1}\,B_{n-2}$, $A_{n-1}\,\mathfrak{A}_n\,\mathfrak{B}_n\,B_{n-1}$, so wird dadurch ein treppenförmiger Körper erzeugt, dessen Inhalt natürlich größer sein muß als der des Paraboloides. Die Höhe eines jeden der Cylinder ist nach der Construction gleich $\frac{x}{n}$; die Radien der einzelnen Grundflächen dagegen



lassen sich als Function von A D ausdrücken. Nennen wir nämlich, von der Spitze anfangend, die Halbmesser der einzelnen Kreisflächen $A_{n-1}\,D_{n-1}$, $A_{n-2}\,D_{n-2}$, $A_{n-3}\,D_{n-3}$, ... $A_2\,D_2$, $A_1\,D_1$, $A\,D$, $y_1, y_2, y_3 \ldots y_{n-2}, y_{n-1}, y_n$, und sehen y_n als gegeben an, so wird

$$y_1^2 = p\,\frac{x}{n},$$

$$y_2^2 = p\,\frac{2\,x}{n},$$

$$\vdots$$

$$y_{n-1}^2 = p\,\frac{(n-1)\,x}{n},$$

$$y_n^2 = p\,\frac{n\,x}{n},$$

mithin auch

$$y_1^2 : y_n^2 = 1 : n$$
$$y_2^2 : y_n^2 = 2 : n$$
$$y_3^2 : y_n^2 = 3 : n$$
$$\vdots$$
$$y_{n-1}^2 : y_n^2 = n-1 : n$$

oder

$$y_1^2 = \frac{1}{n}\,y_n^2,$$

$$y_2^2 = \frac{2}{n}\,y_n^2,$$

$$y_3^2 = \frac{3}{n} y_n^2$$

$$\vdots$$

$$y_{n-1}^2 = \frac{n-1}{n} y_n^2.$$

Der Rauminhalt der einzelnen Cylinder, von der Spitze angefangen, ist also

$$y_1^2 \pi \frac{x}{n} = \frac{1}{n^2} y_n^2 \pi x,$$

$$y_2^2 \pi \frac{x}{n} = \frac{2}{n^2} y_n^2 \pi x,$$

$$\vdots$$

$$y_{n-1}^2 \pi \frac{x}{n} = \frac{n-1}{n^2} y_n^2 \pi x,$$

$$y_n^2 \pi \frac{x}{n} = \frac{n}{n^2} y_n^2 \pi x,$$

ihre Summe, die wir C_1 nennen wollen, daher

$$C_1 = y_n^2 \pi x \frac{1}{n_2} \Big[1 + 2 + 3 + \ldots + (n-1) + n\Big].$$

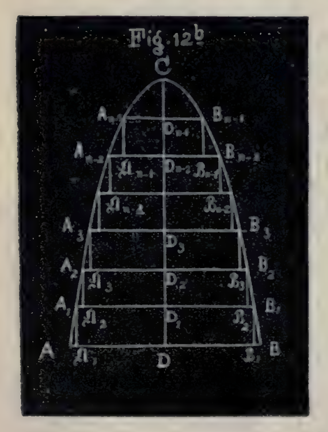
Die eingeklammerte Summe ist eine n=gliedrige arithmetische Reihe erster Ordnung mit dem Anfangsgliede 1 und dem Endgliede n, ihre Summe mithin

$$\frac{1+n}{2} n,$$

so daß

$$C_1 = y_n^2 \pi x \frac{1+n}{2n} = \frac{1}{2} y_n^2 \pi x \left(1 + \frac{1}{n}\right).$$

Beschreibt man die Cylinder nicht um den Parabelkegel, sondern in denselben (Fig. 12b), so wird die Grundfläche des ersten Cylinders mit dem Scheitel C zusammenfallen, also Null sein, die des letzten dagegen den Radius $A_1 D_1$ oder y_{n-1} haben. Der Inhalt des von den einbeschriebenen Cylindern gebildeten Treppenkörpers muß natürlich kleiner als der des Paraboloides sein.



Wie früher hat man

$$y_0^2 = \frac{0}{n} y_n^2,$$

$$y_1^2 = \frac{1}{n} y_n^2,$$

$$y_2^2 = \frac{2}{n} y_n^2,$$
$$\vdots$$
$$y_{n-2}^2 = \frac{n-2}{n} y_n^2,$$
$$y_{n-1}^2 = \frac{n-1}{n} y_n^2,$$

und daraus die Cylinderinhalte

$$\frac{0}{n^2} y_n^2 \pi x,$$
$$\frac{1}{n^2} y_n^2 \pi x,$$
$$\vdots$$
$$\frac{n-2}{n^2} y_n^2 \pi x,$$
$$\frac{n-1}{n^2} y_n^2 \pi x,$$

Die Summe dieser Glieder ist

$$C_2 = y_n^2 \pi \frac{x}{n^2} \left[1 + 2 + 3 + \ldots + (n-1)\right]$$

oder nach Summirung des Klammerausdrucks

$$C_2 = y_n^2 \pi x \frac{n-1}{2n} = \frac{1}{2} y_n^2 \pi x \left(1 - \frac{1}{n}\right).$$

Die Differenz des um- und eingeschriebenen Treppenkörpers ist

$$C_1 - C_2 = \frac{1}{n} y_n^2 \pi x,$$

d. h. gleich dem untersten umschriebenen Cylinder. Mit unendlich wachsenden n, d. h. wenn die Zahl der Schichten unausgesetzt zunimmt und deren Dicke immer geringer wird, kann dieser Unterschied kleiner gemacht werden als jede noch so kleine angebbare Größe, d. h. er nähert sich der Grenze Null, oder, mit anderen Worten, die zwei Treppenkörper nähern sich beide einer bestimmten Grenze, welche keine andere sein kann als der Inhalt des Paraboloides, weil letzterer immer zwischen C_1 und C_2 enthalten bleibt. Es ist daher der Inhalt des Paraboloides

$$V = \text{dem Grenzwerthe von } \frac{1}{2} y_n^2 \pi x \left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

oder

$$= \text{dem Grenzwerthe von } \frac{1}{2} y_n^2 \pi x \left(1 - \frac{1}{n}\right).$$

d. i.

$$V = \frac{1}{2} y_n^2 \pi x.$$

Setzt man noch $y_n^2 = \frac{1}{2} D$, $x = H$, so wird

$$V = \frac{\pi}{8} D^2 H, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 7)$$

oder nach Einführung der Grundfläche,

$$V = \frac{1}{2} G H, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 8)$$

so daß das Volumen eines Parabelkegels gleich ist dem Producte aus der Grundfläche in die halbe Höhe.

Da aus der Gleichung der Parabel $y^2 = px$ sogleich folgt

$$y^2_{1/_2\, n} = \frac{x}{2},$$

so wird auch

$$y^2_{1/_2\, n} : y^2_n = 1 : 2$$

oder

$$y^2_n = 2\, y^2_{1/_2\, n}.$$

Bezeichnet man daher den Durchmesser in der halben Höhe des Paraboloides mit δ, die zugehörige Kreisfläche mit γ, so gehen nach Substitution des Werthes

$$D^2 = 2\, \delta^2$$

die Gleichungen 7) und 8) über in

$$V = \frac{\pi}{4} \delta^2 H \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 9)$$

und

$$V = \gamma H \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 10)$$

aus welchen folgt, daß das Paraboloid gleich ist einer Walze, welche mit ihm gleiche Höhe und seine Mittenstärke zum Durchmesser hat.

2. Der Inhalt des abgekürzten Paraboloides ergiebt sich leicht, wenn man erwägt, daß derselbe gleich sein muß der Differenz zweier Paraboloide ACB und ECF (Fig. 13. d. f. S.).

Nennt man den untern Durchmesser des ersten D, den des zweiten d, die Höhe des ersten H, die des zweiten H′, so wird der Inhalt des Stumpfes

$$V = \frac{\pi}{8} (D^2 H - d^2 H').$$

Es ist aber auch

$$d^2 : D^2 = H' : H,$$

oder nach einem bekannten Satze:

$$d^2 : D^2 - d^2 = H' : H - H',$$

und wenn man die Höhe des Stumpfes $H - H' = DG$ gleich h setzt,

$$H' = \frac{d^2 h}{D^2 - d^2}.$$

Auf gleiche Weise ergiebt sich

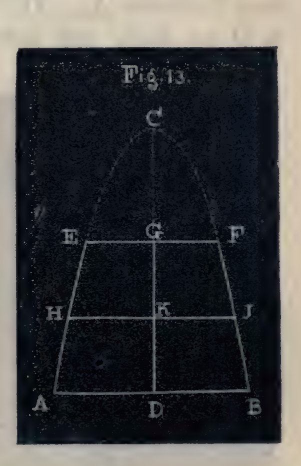
$$D^2 - d^2 : D^2 = H - H' : H$$

und daraus

$$H = \frac{D^2 h}{D_2 - d^2}.$$

Setzt man diese beiden für H' und H gefundenen Werthe in die obige Volumendifferenz ein, so wird dieselbe

$$\frac{\pi}{8} \frac{D^4 - d^4}{D^2 - d^2} h,$$



und da

$$D^4 - d^4 = (D^2 + d^2)(D^2 - d^2),$$

$$v = \frac{\pi}{8}(D^2 + d^2) h, \quad .\ .\ 11)$$

oder auch

$$v = \frac{1}{2}(G + g) h, \quad .\ .\ .\ 12)$$

wenn man mit g die obere Endfläche bezeichnet. Letzterer Ausdruck läßt sich noch vereinfachen. Mißt man nämlich den Parabelstumpf in seiner halben Höhe und nennt den Durchmesser HJ daselbst wieder δ, so ist

$$d^2 : \delta^2 = H' : H' + \frac{1}{2} h.$$

Führt man hier für H' seinen oben gefundenen Werth ein, so wird

$$d^2 : \delta^2 = d^2 : \frac{1}{2}(D^2 + d^2)$$

oder

$$\delta^2 = \frac{1}{2}(D^2 + d^2,$$

mithin, wenn man diesen Ausdruck in Gl. 11) einführt,

$$v = \frac{\pi}{4} \delta^2 h \quad .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ 13)$$

und

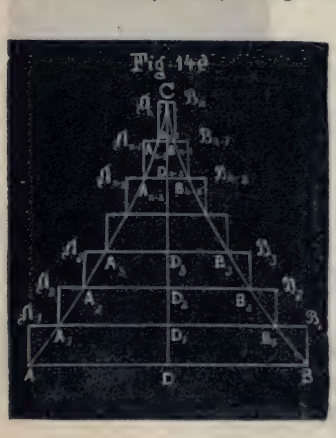
$$v = \gamma h \quad .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ 14)$$

Die oben für das ganze Paraboloid gefundene Inhaltsformel gilt somit auch für den Stumpf desselben.

§. 14.

Das Neiloid.

1. Das im vorigen Paragraphen zur Inhaltsbestimmung des Paraboloides gebrauchte Verfahren kann auch beim Neiloide d. h. bei demjenigen Körper angewendet werden, welcher entsteht, wenn man von einer Neil'schen Parabel durch eine Sehne A B senkrecht zur Axe C D ein Stück abschneidet und dasselbe um seine Axe C D dreht. Zerlegt man sich die Höhe dieses Körpers in n Theile (Fig. 14a.), so sind die in jedem Theilpunkte errichteten Ordinaten $A_{n-1}D_{n-1}$, $A_{n-2}D_{n-2}$, . . A_3D_3, A_2D_2, A_1D_1, A D der Reihe nach ausgedrückt durch die Gleichungen



$$y_1^2 = p\left(\frac{x}{n}\right)^3,$$

$$y_2^2 = p\left(\frac{2x}{n}\right)^3,$$

$$y_3^2 = p\left(\frac{3x}{n}\right)^3,$$

$$\vdots$$

$$y_{n-1}^2 = p\left(\frac{(n-1x)}{n}\right)^3,$$

$$y_n^2 = p\left(\frac{nx}{n}\right)^3,$$

Mithin verhält sich

$$y_1^2 : y_n^2 = 1^3 : n^3,$$

$$y_2^2 : y_n^2 = 2^3 : n^3,$$

$$y_3^2 : y_n^2 = 3^3 : n^3,$$

$$\vdots$$

$$y_{n-1}^2 : y_n^2 = (n-1)^3 : n^3,$$

oder es ist

$$y_1^2 = \left(\frac{1}{n}\right)^3 y_n^2,$$

$$y_2^2 = \left(\frac{2}{n}\right)^3 y_n^2,$$

$$y_3^2 = \left(\frac{3}{n}\right)^3 y_n^2$$

$$\vdots$$

$$y_{n-1}^2 = \left(\frac{n-1}{n}\right)^3 y_n^2.$$

Beschreibt man nun über jedem der Halbmesser y_1, y_2, . . . y_{n-1}, y_n Cylinder von der Höhe $\frac{x}{n}$, nämlich $A_{n-1}\mathfrak{A}_n\mathfrak{B}_nB_{n-1}$,

$A_{n-2}\,\mathfrak{A}_{n-1}\,\mathfrak{B}_{n-1}\,B_{n-2}, \ldots A_1\,\mathfrak{A}_2\,\mathfrak{B}_2\,B_1,\ A\,\mathfrak{A}_1\,\mathfrak{B}_1\,B$, so erhält man wieder einen treppenförmigen, das Neiloid einschließenden Körper. Da die Inhalte der einzelnen Cylinder der Reihe nach

$$y_1{}^2\,\pi\,\frac{x}{n} = \frac{1^3}{n^4}\,y_n{}^2\,\pi x,$$

$$y_2{}^2\,\pi\,\frac{x}{n} = \frac{2^3}{n^4}\,y_n{}^2\,\pi x,$$

$$y_3{}^2\,\pi\,\frac{x}{n} = \frac{3^3}{n^4}\,y_n{}^2\,\pi x,$$

$$\vdots$$

$$y_{n-1}^2\,\pi\,\frac{x}{n} = \frac{(n-1)^3}{n^4}\,y_n{}^2\,\pi x$$

$$y_n{}^2\,\pi\,\frac{x}{n} = \frac{n^3}{n^4}\,y_n{}^2\,\pi x$$

sind, so beträgt ihre Summe

$$C_1 = y_n{}^2\,\pi x\,\frac{1}{n^4}\left(1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + (n-1)^3 + n^3\right),$$

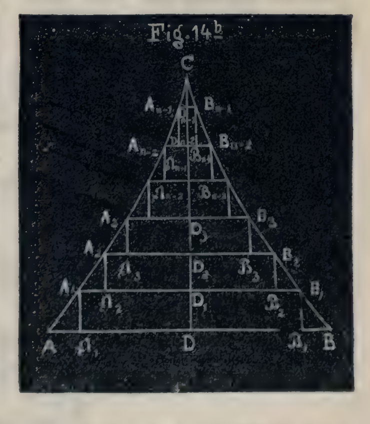
oder, da die Summe der n ersten Cubikzahlen gleich

$$\left(\frac{n\,(n+1)}{2}\right)^2 = \frac{n^4}{4}\left(1 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}\right)$$

ist,

$$C_1 = y_n{}^2\,\pi x\,\frac{1}{4}\left(1 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}\right) = \frac{1}{4}\,y_n{}^2\,\pi\,x\left(1 + \frac{2}{n} \div \frac{1}{n^2}\right)$$

Beschreibt man weiter in das Neiloid eine Summe von Cylindern über den Halbmessern $0, y_1, y_2, \cdots y_{n-2}, y_{n-1}$, (Fig. 14b), so werden die letzteren der Reihe nach durch y_n ausgedrückt werden können, indem



$$y_0{}^2 = \left(\frac{0}{n}\right)^3 y_n{}^2,$$

$$y_1{}^2 = \left(\frac{1}{n}\right)^3 y_n{}^2,$$

$$\vdots$$

$$y_{n-2}^2 = \left(\frac{n-2}{n}\right)^3 y_n{}^2,$$

$$y_{n-1}^2 = \left(\frac{n-1}{n}\right)^3 y_n{}^2.$$

Die über diesen Halbmessern construirten Cylinder haben dann den Inhalt

$$y_0{}^2\,\pi\,\frac{x}{n} = \frac{0^3}{n^4}\,y_n{}^2\,\pi x,$$

$$y_1^{\,2}\,\pi\,\frac{x}{n} = \frac{1^3}{n^4}\,y_n^{\,2}\,\pi x,$$

$$y_2^{\,2}\,\pi\,\frac{x}{n} = \frac{2^3}{n^4}\,y_n^{\,2}\,\pi x,$$

$$\vdots$$

$$y_{n-2}^{2}\,\pi\,\frac{x}{n} = \frac{(n-2)^3}{n^4}\,y_n^{\,2}\,\pi x,$$

$$y_{n-1}^{2}\,\pi\,\frac{x}{n} = \frac{(n-1)^3}{n^4}\,y_n^{\,2}\,\pi x,$$

ihre Summe wird somit sein

$$C_2 = y_n^{\,2}\,\pi x\,\frac{1}{n^4}\left(0^3 + 1^3 + 2^3 + \ldots + (n-2)^3 + (n-1)^3\right),$$

oder, da die Summe der eingeklammerten Größe

$$\left(\frac{n\,(n-1)}{2}\right)^2 = \frac{n^4}{4}\left(1 - \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}\right)$$

beträgt,

$$C_2 = y_n^{\,2}\,\pi x \cdot \frac{1}{4}\left(1 - \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}\right) = \frac{1}{4}\,y_n^{\,2}\,\pi x\left(1 - \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}\right).$$

Die Differenz der beiden Treppenkörper ist auch hier wieder

$$C_1 - C_2 = y_n^{\,2}\,\pi\,\frac{x}{n},$$

oder gleich dem über der Endordinate beschriebenen Cylinder. Sie kann mithin durch in's Unendliche wachsende n kleiner gemacht werden als jede noch so kleine angebbare Größe, d. h. sie hat die Null zur Grenze. Beide Treppenkörper nähern sich also ein und derselben Grenze, welche keine andere sein kann als der Inhalt des Neiloides, weil letzterer immer zwischen C_1 und C_2 enthalten bleibt. Es ist daher der Inhalt des Neiloides

$$V = \text{dem Grenzwerthe von } \frac{1}{4}\,y_n^{\,2}\,\pi x\left(1 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}\right)$$

oder

$$= \text{dem Grenzwerthe von } \frac{1}{4}\,y_n^{\,2}\,\pi x\left(1 - \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}\right),$$

d. i.

$$V = \frac{1}{4}\,y_n^{\,2}\,\pi x,$$

oder wenn man $y_n = \frac{1}{2}\,D$, $x = H$ setzt,

$$V = \frac{\pi}{16}\,D^2 H \quad \ldots\ldots\ldots \quad 15)$$

und

$$V = \frac{1}{4} G H, \quad \ldots\ldots \quad 16)$$

was sich leicht in Worte übertragen läßt.

Will man auch hier statt der Endfläche die in halber Höhe gemessene einführen, so wird wegen

$$y^2_{\frac{1}{2}n} : y_n^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^3 : 1 = 1 : 8$$

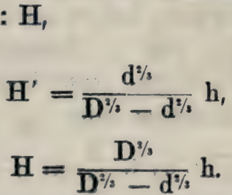
$$y_n^2 = 8\ y^2_{\frac{1}{2}n},$$

und, wenn man wieder $y_{\frac{1}{2}n} = \frac{1}{2}\delta$ setzt,

$$V = \frac{\pi}{2} \delta^2 H. \quad \ldots\ldots \quad 17)$$

$$= 2\gamma H. \quad \ldots\ldots \quad 18)$$

2. Das abgekürzte Neiloid geht wieder hervor aus der Differenz zweier Neiloide ACB und ECF (Fig. 15.) mit den Höhen H und H' und den Durchmessern D und d. Es wird nämlich der Inhalt desselben



$$v = \frac{\pi}{16} (D^2 H - d^2 H').$$

Aus der Gleichung der Neil'schen Parabel folgt aber

$$d^2 : D^2 = H'^3 : H^3,$$

oder nach bekannten Sätzen, und wenn man H—H'=DG gleich h setzt,

$$d^{2/3} : D^{2/3} = H' : H,$$

$$d^{2/3} : D^{2/3} - d^{2/3} = H' : H - H'$$
$$= H' : h,$$

$$D^{2/3} - d^{2/3} : D^{2/3} = H - H' : H$$
$$= h : H,$$

und daraus

$$H' = \frac{d^{2/3}}{D^{2/3} - d^{2/3}} h,$$

$$H = \frac{D^{2/3}}{D^{2/3} - d^{2/3}} h.$$

Setzt man diese Werthe in der obigen Volumendifferenz ein, so geht dieselbe über in

$$\frac{\pi}{16} \frac{D^2 \cdot D^{2/3} - d^2 \cdot d^{2/3}}{D^{2/3} - d^{2/3}} h = \frac{\pi}{16} \frac{D^{8/3} - d^{8/3}}{D^{2/3} - d^{2/3}} h.$$

Da $D^{8/3} - d^{8/3} = (D^{4/3} + d^{4/3})(D^{4/3} - d^{4/3}) =$
$(D^{4/3} + d^{4/3})(D^{2/3} + d^{2/3})(D^{2/3} - d^{2/3})$, so wird

$$v = \frac{\pi}{16} (D^{4/3} + d^{4/3}) \; (D^{2/3} + d^{2/3}) \; h$$

und nach einigen leichten Rechnungen

$$v = \frac{\pi}{16} \left(D^2 + D^{2/3} \, d^{2/3} \; (D^{2/3} + d^{2/3}) + d^2\right) h \quad . \; . \; 19)$$

oder

$$v = \frac{\pi}{16} \left(D^2 + \sqrt[3]{D^2 \, d^2} \; (\sqrt[3]{D^2} + \sqrt[3]{d^2}) + d^2\right) h \; . \; . \; 20)$$

und nach Einführung der Endflächen

$$v = \frac{1}{4} \left(G + \sqrt[3]{Gg} \; (\sqrt[3]{G} + \sqrt[3]{g}) + g\right) h. \; . \; . \; 21)$$

Als Function allein des Mittendurchmessers läßt sich der Neiloidenstumpf nicht ausdrücken.

§. 15.

Die Cubirungsmethoden und Formeln für Baumschäfte bei wissenschaftlichen Untersuchungen.

1. Will man den Inhalt von Baumschäften Behufs wissenschaftlicher Untersuchungen berechnen, so muß, wenn man ganz streng verfahren will, der Schaft nach und nach in 1, 2, 4, 8 . . . Theile zerlegt, die Inhalte dieser Theile nach einer der oben für abgekürzte kegelförmige Körper gegebenen Formeln berechnet, und mit dieser Halbirung der einzelnen Theile so lange fortgefahren werden, bis die Summe der Inhalte von n Theilen mit der Summe der Inhalte von 2 n Theilen in einer gewissen Anzahl von Decimalstellen übereinstimmt. Da eingebauchte oder neiloidische Schaftformen nur selten und dann meistens nur am Stockende des Schaftes auf kurzen Strecken vorkommen, so brauchen die für die Rechnung äußerst unbequemen Inhaltsformeln des Neiloidstumpfes gar nicht in Anwendung zu kommen und nur diejenigen des abgekürzten geradseitigen und Parabelkegels in Betracht gezogen zu werden, also

$$\frac{1}{3} (G + \sqrt{Gg} + g) \; h, \; \frac{1}{2} (G + g) \; h \text{ und } \gamma h.$$

Aber auch ganz geradseitige Baumformen werden nicht häufig sein und sich höchstens in unbedeutender Ausdehnung in der Mitte des Stammes finden, vielmehr werden fast alle Stämme in dem größten Theile ihrer Schaftlänge eine, sei es auch nur geringe Ausbauchung zeigen. Dadurch kommt auch noch die Formel

$$\frac{1}{3} (G + \sqrt{Gg} + g) \; h$$

in Wegfall, deren Handhabung überdies nicht ohne Schwierigkeit ist. Von Baumcubirungsformeln muß man aber vor Allem fordern, daß sie die Anwendung einfacher Hülfstafeln gestatten. Dieser Forderung entsprechen jedoch nur die Inhaltsformeln des Paraboloidstumpfes

$$\frac{1}{2}(G + g)\, h \text{ und } \gamma h,$$

welche überdies auch der Ausbauchung der Stämme Rechnung tragen.

2. Wenn nicht besonders auffallende Unregelmäßigkeiten im Wuchse des Stammes eine Abweichung nöthig machen, wird man den einzelnen Theilen, in welche man den Schaft zerlegt, gleiche Länge geben. Nennen wir dieselbe l und außerdem die zu den Durchmessern D_0, D_1, D_2, ... D_n gehörigen Endflächen der Sectionen G_0, G_1, G_2, ... G_n, so wird der Inhalt eines Baumschaftes sich berechnen zu

$$V = \frac{1}{2}(G_0 + G_1)\, l + \frac{1}{2}(G_1 + G_2)\, l + \ldots$$
$$+ \frac{1}{2}(G_{n-2} + G_{n-1})\, l + \frac{1}{2}(G_{n-1} + G_n)\, l,$$

oder nach Aushebung des gemeinsamen Factors $\frac{1}{2}\, l$ und Addition der zusammengehörigen Glieder

$$V = \frac{1}{2}\left[G_0 + 2\,(G_1 + G_2 + \ldots + G_{n-1}) + G_n\right] l \quad . \quad . \quad 1)$$

oder

$$V = \left[\frac{1}{2}(G_0 + G_n) + G_1 + G_2 + \ldots + G_{n-1}\right] l \quad . \quad . \quad 1a)$$

Mißt man nicht die Durchmesser der Endflächen der einzelnen Sectionen, sondern deren Mittenstärken, so folgt, wenn man die, diesen Stärken zugehörigen Kreisflächen γ_1, γ_2, γ_3, ... γ_n nennt, der Inhalt des Stammes zu

$$V = \gamma_1\, l + \gamma_2\, l + \gamma_3\, l + \ldots + \gamma_n\, l$$

oder

$$V = (\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \ldots + \gamma_n)\, l \quad . \quad . \quad . \quad 2)$$

Sollte $n\,l$, das Product aus der Sectionszahl in die Sectionslänge, nicht genau gleich der Länge des zu berechnenden Baumschaftes sein, so würde noch ein Stück von der Länge l_1 mit der Endfläche G_m oder der Mittenfläche γ_m übrig bleiben und es müßten den Inhaltsformeln 1) und 2) noch bezüglich die Stücke

$$\frac{1}{2}(G_n + G_m)\, l_1$$

und

$$\gamma_m \, l_1$$

zugesetzt werden.

3. Zu einem Rechnungsbeispiele für die Formeln 1) und 2) mögen die folgenden, an einem 12,00 Meter langen Fichtenstamme abgenommenen Maße dienen. Der Stamm wurde überhaupt in 24 Sectionen von 0,5 Meter Länge gemessen, so daß, wenn wir zwölf Sectionen von 1 Meter Länge bilden, die ungeradzahligen Durchmesser den Endflächen, die geradzahligen den Mittenflächen dieser Sectionen zugehören. Die ersteren ergeben also die Elemente für die Gleichung 1), die anderen für die Gleichung 2). Die einzelnen Durchmesser nebst deren Kreisflächen sind folgende:

1. Für Formel 1.

$D_0 = 17{,}9$ Cent, $G_0 = 0{,}025165$ Quadratmeter,
$D_{12} = 6{,}9$ „ $G_{12} = 0{,}003739$ „

$G_0 + G_{12} = 0{,}028904$ Quadratmeter,
$\frac{1}{2}(G_0 + G_{12}) = 0{,}014452$ „

$D_1 = 16{,}7$ Cent, $G_1 = 0{,}021904$ Quadratmeter,
$D_2 = 15{,}8$ „ $G_2 = 0{,}019607$ „
$D_3 = 15{,}0$ „ $G_3 = 0{,}017671$ „
$D_4 = 14{,}0$ „ $G_4 = 0{,}015394$ „
$D_5 = 13{,}6$ „ $G_5 = 0{,}014527$ „
$D_6 = 13{,}5$ „ $G_6 = 0{,}014314$ „
$D_7 = 13{,}0$ „ $G_7 = 0{,}013273$ „
$D_8 = 12{,}1$ „ $G_8 = 0{,}011499$ „
$D_9 = 10{,}8$ „ $G_9 = 0{,}009161$ „
$D_{10} = 9{,}5$ „ $G_{10} = 0{,}007088$ „
$D_{11} = 8{,}5$ „ $G_{11} = 0{,}005675$ „

$G_1 + G_2 + \ldots + G_{11} = 0{,}150113$ Quadratmeter.

Sonach

$$\frac{1}{2}(G_0 + G_{12}) + G_1 + G_2 + \ldots + G_{11}$$
$$= 0{,}164565 \text{ Quadratmeter}$$

und, da $l = 1$ Meter,

$$V = 0{,}164565 \text{ Cubicmeter.}$$

2. Für Formel 2.

δ_1	= 17,1 Cent,	γ_1	= 0,022966 Quadratmeter,
δ_2	= 16,1 „	γ_2	= 0,020358 „
δ_3	= 15,8 „	γ_3	= 0,019607 „
δ_4	= 14,7 „	γ_4	= 0,016972 „
δ_5	= 14,0 „	γ_5	= 0,015394 „
δ_6	= 13,6 „	γ_6	= 0,014527 „
δ_7	= 13,3 „	γ_7	= 0,013893 „
δ_8	= 12,6 „	γ_8	= 0,012469 „
δ_9	= 11,6 „	γ_9	= 0,010568 „
δ_{10}	= 10,5 „	γ_{10}	= 0,008659 „
δ_{11}	= 8,5 „	γ_{11}	= 0,005675 „
δ_{12}	= 7,7 „	γ_{12}	= 0,004657 „

$\gamma_1 + \gamma_2 + \ldots + \gamma_{12} = 0{,}165745$ Quadratmeter,

mithin, da $l = 1$ Meter,

$$V = 0{,}165745 \text{ Cubicmeter.}$$

Addirt man diese Summe zu der vorigen, so muß die Hälfte dieses Aggregates oder

$$0{,}165155 \text{ Cubicmeter}$$

der nach Formel 1) aus 24 Sectionen folgende Cubikinhalt des Stammes sein.

Wir wollen diese Maße noch dazu benutzen, für die am Anfange dieses Paragraphen angedeutete Ermittelung des Cubikinhaltes durch fortgesetzte Halbirung der Theile ein Beispiel zu geben.

1. Für Formel 1.

a) 1 Section.

$D_0 = 17{,}9$ Cent, $G_0 = 0{,}025165$ Quadratmeter,
$D_{12} = 6{,}9$ „ $G_{12} = 0{,}003739$ „

$G_0 + G_{12} = 0{,}028904$ Quadratmeter,

$\frac{1}{2}(G + G_{12}) = 0{,}014452$ „

Da $l = 12$, so wird

$$V_1 = 0{,}173424 \text{ Cubicmeter.}$$

b) 2 Sectionen.

$D_6 = 13{,}5$ Cent, $G_6 = 0{,}014314$ Quadratmeter,

$\frac{1}{2}(G_0 + G_{12}) = 0{,}014452$ „

$\frac{1}{2}(G_0 + G_{12}) + G_6 = 0{,}028766$ Quadratmeter.

Wegen $l = 6$ Meter wird

$$V_2 = 0{,}172596 \text{ Cubikmeter.}$$

c) 4 Sectionen.

$D_3 = 15{,}0$ Cent, $G_3 = 0{,}017671$ Quadratmeter,
$D_6 = 13{,}5$ „ $G_6 = 0{,}014314$ „
$D_9 = 10{,}8$ „ $G_9 = 0{,}009161$ „

$G_3 + G_6 + G_9 = 0{,}041146$ Quadratmeter,
$\frac{1}{2}(G_0 + G_{12}) = 0{,}014452$ „

$$\frac{1}{2}(G_0 + G_{12}) + G_3 + G_6 + G_9 = 0{,}055598 \text{ Quadratmeter.}$$

Da $l = 3$ Meter, so ist

$$V_4 = 0{,}166794 \text{ Cubikmeter.}$$

d) 8 Sectionen.

$\delta_2 = 16{,}1$ Cent, $\gamma_2 = 0{,}020358$ Quadratmeter,
$D_3 = 15{,}0$ „ $G_3 = 0{,}017671$ „
$\delta_5 = 14{,}0$ „ $\gamma_5 = 0{,}015394$ „
$D_6 = 13{,}5$ „ $G_6 = 0{,}014314$ „
$\delta_8 = 12{,}6$ „ $\gamma_8 = 0{,}012469$ „
$D_9 = 10{,}8$ „ $G_9 = 0{,}009161$ „
$\delta_{11} = 8{,}5$ „ $\gamma_{11} = 0{,}005675$ „

$\gamma_2 + G_3 + \ldots + \gamma_{11} = 0{,}095042$ Quadratmeter,
$\frac{1}{2}(G_0 + G_{12}) = 0{,}014452$ „

$$\frac{1}{2}(G_0 + G_{12}) + \gamma_2 + G_3 + \ldots + \gamma_{11} = 0{,}109494 \text{ Quadratmeter.}$$

Da $l = 1{,}5$ Meter, so wird

$$V_8 = 0{,}164241 \text{ Cubikmeter.}$$

2. Für Formel 2.

a) 1 Section.

$D_6 = 13{,}5$ Cent, $G_6 = 0{,}014314$ Quadratmeter.

Da $l = 12$ Meter, so wird

$$V_1 = 0{,}171768 \text{ Cubikmeter.}$$

b) 2 Sectionen.

$D_3 = 15{,}0$ Cent, $G_3 = 0{,}017671$ Quadratmeter,
$D_9 = 10{,}8$ „ $G_9 = 0{,}009161$ „

$\gamma_2 + \gamma_9 = 0{,}026832$ Quadratmeter,

woraus für $l = 6$ Meter folgt

$$V_2 = 0{,}160992 \text{ Cubikmeter.}$$

c) 4 Sectionen.

$\delta_2 = 16{,}1$ Cent, $\gamma_2 = 0{,}020358$ Quadratmeter,
$\delta_5 = 14{,}0$ „ $\gamma_5 = 0{,}015394$ „
$\delta_8 = 12{,}6$ „ $\gamma_8 = 0{,}012469$ „
$\delta_{11} = 8{,}5$ „ $\gamma_{11} = 0{,}005675$ „

$\gamma_2 + \ldots + \gamma_{11} = 0{,}053896$ Quadratmeter,

so daß wegen $l = 3$ Meter

$$V_4 = 0{,}161688 \text{ Cubicmeter.}$$

3. Die Formeln 1) und 2) setzen, wie schon erwähnt, eine Ausbauchung der Schaftcurve voraus. Man kann sich aber von dieser Voraussetzung unabhängig machen, indem man zur Berechnung des Schaftinhaltes einen Ausdruck verwendet, welcher für die drei oben betrachteten Kegelformen zugleich Gültigkeit hat.

a) Bezeichnen wir, wie früher mit D und d die Durchmesser der Endflächen, mit δ den Durchmesser der Mittenfläche des geradseitigen Kegelstumpfes, mit h dessen Höhe, so ist, wie aus Fig. 16. hervorgeht,

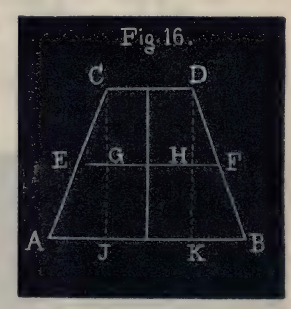
$$EF - GH : AB - JK = \frac{1}{2} h : h,$$

oder

$$\delta - d : D - d = 1 : 2,$$

woraus

$$\delta = \frac{1}{2}(D + d).$$



Zerlegt man nun den Ausdruck

$$v = \frac{\pi}{12}(D^2 + Dd + d^2)\, h$$

in

$$\frac{\pi}{12}\left(\frac{D^2}{2} + \frac{d^2}{2} + \frac{D^2}{2} + \frac{2\,Dd}{2} + \frac{d^2}{2}\right) h$$
$$= \frac{\pi}{24}\left(D^2 + d^2 + (D + d)^2\right) h,$$

und setzt $D + d = 2\,\delta$, so wird

$$v = \frac{\pi}{24}(D^2 + 4\,\delta^2 + d^2)\, h,$$

oder, wenn man für D, δ und d die entsprechenden Flächen setzt,

$$v = \frac{1}{6}(G + 4\gamma + g)\, h.$$

b) Für das abgekürzte Paraboloid hat man

$$v = \frac{\pi}{8}(D^2 + d^2)\, h.$$

Die rechte Seite dieser Gleichung läßt sich auflösen in

$$\frac{\pi}{8}\left(\frac{D^2}{3}+\frac{d^2}{3}+\frac{2\,D^2}{3}+\frac{2\,d^2}{3}\right)\,h$$
$$=\frac{\pi}{24}\left(D^2+d^2+2(D^2+d)^2\right)\,h.$$

Nach §. 13, 2. ist aber $\frac{1}{2}(D^2+d^2)=\delta^2$, mithin $2\,(D^2+d^2) = 4\,\delta^2$ und

$$v=\frac{\pi}{24}\,(D^2+4\,\delta^2+d^2)\;h$$

oder auch

$$v=\frac{1}{6}\,(G+4\,\gamma+g)\;h.$$

c) Der Inhalt des Neiloidstumpfes

$$v=\frac{\pi}{16}\left(D^2+D^{2/3}\,d^{2/3}\,(D^{2/3}+d^{2/3})+d^2\right)\,h$$

läßt sich, nachdem man den ersten Factor mit $\frac{2}{3}$, den zweiten mit $\frac{3}{2}$ multiplicirt hat, zerlegen in

$$\frac{\pi}{24}\left(\frac{3\,D^2}{2}+\frac{3\,D^{2/3}\,d^{2/3}\,(D^{2/3}+d^{2/3})}{2}+\frac{3\,d^2}{2}\right)\,h=$$
$$\frac{\pi}{24}\left[D^2+d^2+\frac{1}{2}\,[D^2+3\,D^{2/3}\,d^{2/3}\,(D^{2/3}+d^{2/3})+d^2]\right]\,h.$$

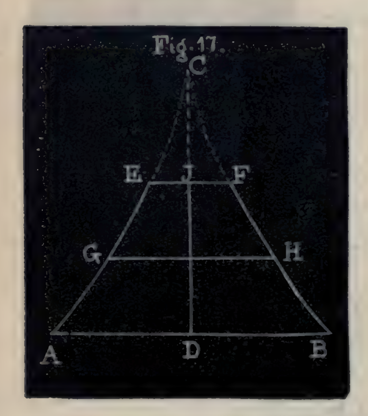


Fig. 17.

Denkt man sich den Stumpf AEFB (Fig. 17.) zum vollen Neiloid ACB ergänzt, und die Höhe des ergänzenden Stückes mit H' bezeichnet, die Mittenstärke aber wieder mit δ, so ist zufolge der Gleichung der Neil'schen Parabel

$$d^{2/3} : \delta^{2/3} = H' : H' + \frac{1}{2}\,h,$$
$$d^{2/3} : D^{2/3} = H' : H' + h,$$

oder

$$d^{2/3} : \delta^{2/3} - d^{2/3} = H' : \frac{1}{2}\,h,$$
$$d^{2/3} : D^{2/3} - d^{2/3} = H' : h.$$

Dividirt man die untere dieser Gleichungen durch die obere, so wird

$$\frac{\delta^{2/3}-d^{2/3}}{D^{2/3}-d^{2/3}}=\frac{1}{2}$$

oder

$$2\,\delta^{2/3}=D^{2/3}+d^{2/3}.$$

Erhebt man diese Gleichung zur dritten Potenz, so geht dieselbe über in

$$8\,\delta^2 = D^2 + 3\,D^{2/3}\,d^{2/3}\,(D^{2/3} + d^{2/3}) + d^2,$$

d. h. in den oben in Klammern eingeschlossenen Ausdruck. Substituirt man für denselben das gleichwerthige $8\,\delta^2$, so wird

$$v = \frac{\pi}{24}\,(D^2 + 4\,\delta^2 + d^2)\ h$$

oder

$$v = \frac{1}{6}\,(G + 4\,\gamma + g)\ h.$$

Der Inhalt der Stumpfe des geradseitigen Kegels, des Paraboloides und Neiloides wird mithin durch einen Ausdruck von genau derselben Form gefunden. Man kann sich deshalb durch Anwendung desselben von den besonderen Eigenschaften der Schaftbildung unabhängig machen. In der Literatur der Holzmeßkunst wird derselbe häufig als Rieckesche Formel bezeichnet.

Setzt man $d = 0$, d. h. läßt man den Stumpf in einen Vollkörper übergehen, so erhält man als Inhaltsformel des geradseitigen Kegels, Paraboloides und Neiloides

$$V = \frac{\pi}{24}\,(D^2 + 4\,\delta^2)\ h$$

oder auch

$$V = \frac{1}{6}\,(G + 4\,\gamma)\ h.$$

4. Die Riecke'sche Formel gestattet natürlich gleichfalls eine fortgesetzte Anwendung auf einen in kleine Theile zerlegten Baumschaft, nur muß, da immer je zwei Sectionen bei der Rechnung zusammengefaßt werden, die Anzahl n derselben eine gerade Zahl, also von der Form 2m sein, wo man für m alle Zahlen von 1, 2, 3 . . . m zu setzen hat. Dann wird, wenn man die einzelnen Querflächen wieder gleich G_0, G_1, G_2 . . . . G_n, und die doppelte Länge der Sectionen, also die Entfernung der ersten von der dritten Querfläche ꝛc. gleich $2\,l$ setzt,

$$V = \frac{1}{6}\,(G_0 + 4\,G_1 + G_2)\,2\,l + \frac{1}{6}\,(G_2 + 4\,G_3 + G_4)\,2\,l + \ldots + \frac{1}{6}\,(G_{n-2} + 4\,G_{n-1} + G_n)\,2\,l,$$

woraus sich nach einigen leichten Rechnungen

$$V = \frac{1}{6}\Big[G_0 + G_n + 4\,(G_1 + G_3 + G_5 + \ldots + G_{n-1}) + 2\,(G_2 + G_4 + G_6 + \ldots + G_{n-2})\Big]\,2\,l \quad . \quad . \quad 3)$$

ergiebt.

Führt man statt 2 l den Abstand je zweier benachbarter Sectionen, also l ein, so wird

$$V = \frac{1}{3}\Big[G_0 + G_n + 4\,(G_1 + G_3 + G_5 + \ldots + G_{n-1})$$
$$+ 2\,(G_2 + G_4 + G_6 + \ldots + G_{n-2})\Big]\,l \quad . \quad . \quad 4)$$

Die Gleichungen 3) und 4) sind unter dem Namen „Simpson's Regel"*) bekannt; setzt man noch

$$G_0 + G_n = \mathfrak{G}_0,$$
$$G_1 + G_3 + G_5 + \ldots + G_{n-1} = \mathfrak{G}_1,$$
$$G_2 + G_4 + G_6 + \ldots + G_{n-2} = \mathfrak{G}_2,$$

so gehen dieselben über in

$$V = \frac{1}{6}\left(\mathfrak{G}_0 + 4\,\mathfrak{G}_1 + 2\,\mathfrak{G}_2\right)2\,l \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 5)$$

und

$$V = \frac{1}{3}\left(\mathfrak{G}_0 + 4\,\mathfrak{G}_1 + 2\,\mathfrak{G}_2\right)l \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 6)$$

Das oben unter 3) gegebene Rechnungsbeispiel kann auch für die Simpson'sche Regel benutzt werden, da die Zahl der Sectionen gleich 24, also gerade ist. Außerdem ist $2\,l = 1$, $l = 0{,}5$ Meter. Dann hat man

D_0	= 17,9	Cent,	G_0	= 0,025165	Quadratmeter,
D_{12}	= 6,9	„	G_{12}	= 0,003739	„
			$\mathfrak{G}_0$	= 0,028904	Quadratmeter.
δ_1	= 17,1	Cent,	γ_1	= 0,022966	Quadratmeter,
δ_2	= 16,1	„	γ_2	= 0,020358	„
δ_3	= 15,8	„	γ_3	= 0,019607	„
δ_4	= 14,7	„	γ_4	= 0,016972	„
δ_5	= 14,0	„	γ_5	= 0,015394	„
δ_6	= 13,6	„	γ_6	= 0,014527	„
δ_7	= 13,3	„	γ_7	= 0,013893	„
δ_8	= 12,6	„	γ_8	= 0,012469	„
δ_9	= 11,6	„	γ_9	= 0,010568	„
δ_{10}	= 10,5	„	γ_{10}	= 0,008659	„
δ_{11}	= 8,5	„	γ_{11}	= 0,005675	„
δ_{12}	= 7,7	„	γ_{12}	= 0,004657	„
			$\mathfrak{G}_1$	= 0,165745	Quadratmeter,
			$4\,\mathfrak{G}_1$	= 0,662980	„

*) Nach dem Engländer Thomas Simpson, Professor der Mathematik in Woolwich, geb. 1710, gest. 1761.

D_1	= 16,7 Cent,	G_1	= 0,021904	Quadratmeter,
D_2	= 15,8 „	G_2	= 0,019607	„
D_3	= 15,0 „	G_3	= 0,017671	„
D_4	= 14,0 „	G_4	= 0,015394	„
D_5	= 13,6 „	G_5	= 0,014527	„
D_6	= 13,5 „	G_6	= 0,014314	„
D_7	= 13,0 „	G_7	= 0,013273	„
D_8	= 12,1 „	G_8	= 0,011499	„
D_9	= 10,8 „	G_9	= 0,009161	„
D_{10}	= 9,5 „	G_{10}	= 0,007088	„
D_{11}	= 8,5 „	G_{11}	= 0,005675	„
		$\mathfrak{G}_2$	= 0,150113	Quadratmeter,
		$2\,\mathfrak{G}_2$	= 0,300226	„

Daraus folgt

$$\mathfrak{G}_0 + 4\,\mathfrak{G}_1 + 2\,\mathfrak{G}_2 = 0{,}028904 + 0{,}662980 + 0{,}300226$$
$$= 0{,}992110 \text{ Quadratmeter,}$$

und nach Division mit 6,

$$V = 0{,}165352 \text{ Cubicmeter.}$$

Uebrigens würde man für diesen Stamm erhalten

aus zwei Sectionen . . . . $V = 0{,}172320$ Cubicmeter,
aus vier Sectionen . . . . $V = 0{,}164860$ „
endlich aus acht Sectionen . $V = 0{,}163390$ „

§. 16.

Fortsetzung.

1. Es ist weiter oben schon (§. 15. 1.) der Weg vorgezeichnet worden, welcher zur ganz strengen Ermittelung des Inhaltes der Baumschäfte einzuschlagen sein würde, derselbe ist jedoch so zeitraubend, daß man sich seiner nie bedient.

Man zerlegt vielmehr bei allen Untersuchungen der Holzmeßkunst die Baumschäfte ohne Weiteres in eine beliebige Anzahl bald längere, bald kürzere Theile, und berechnet den Massengehalt derselben dann nach irgend einer der oben entwickelten Cubirungsformeln. Freilich entbehrt man bei einem solchen Verfahren jeder Kenntniß der erlangten Genauigkeit.

Wir haben früher bei einer Anzahl Baumschäfte den strengen Weg eingeschlagen*) und Untersuchungen darüber angestellt, welche von den drei im vorigen Paragraphen entwickelten Cubirungsformeln die Baumschäfte am genauesten berechnet, und Folgendes gefunden.

*) Tharand. Forstl. Jahrb. 19. B. S. 244.

a) Die Berechnung des Massengehaltes der Baumschäfte aus einer sehr großen Anzahl Sectionen liefert bei allen drei Formeln nahezu denselben Werth, da die Stücke des Schaftes den Stumpfen von Parabelkegeln um so näher kommen, je kürzer sie sind. Dabei ist jedoch zu erwähnen, daß die Formel 2) oder

$$V = (\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \ldots + \gamma_n)\, l$$

die leichteste Anwendung gestattet, weil sie nur eine einfache Summirung der Kreisflächen erfordert, während die letzteren bei Gleichung 1) in zwei, bei Gleichung 3) sogar in drei Gruppen getrennt werden müssen.

b) Bei Anwendung einer kleineren Anzahl Sectionen geben Formel 2) und 3) das genaueste Resultat, während Formel 1) sehr bald ganz unbrauchbar wird. Es beruht dies darauf, daß in letzterer Formel die Endfläche G_0, welche die größte, wegen ihrer Unregelmäßigkeit aber auch fehlerhafteste ist, auf die Summe der übrigen Flächen einen sehr bedeutenden Einfluß übt, was bei Simpson's Regel viel weniger der Fall sein kann, während diese Fläche in Gleichung 2) gar nicht erscheint.

c) Für Rechnungen, welche nicht die größte Genauigkeit erfordern, liefern acht und selbst schon sechs Sectionen nach Formel 2) und 3) recht brauchbare Resultate. Wenn die Anzahl der zu berechnenden Stämme eine größere ist, wird man selbst bei sechs Sectionen im Durchschnitt einen Fehler von höchstens einem Procent begehen.

d) Für sehr genaue Untersuchungen wird man Sectionen wählen müssen, deren Länge zwei Meter nicht übersteigt und die Formeln 2) oder 3) zur Berechnung benutzen, die Formel 1) aber ganz ausschließen.

2. Gewöhnlich pflegt man schwache und starke Hölzer bei der Untersuchung auf ganz gleiche Weise zu behandeln, d. h. die stärksten Durchmesser bis auf dieselben Bruchtheile der Maßeinheit abzurunden wie die schwächsten. Dadurch erhalten natürlich die diesen Durchmessern zugehörigen Flächen einen ganz verschiedenen Genauigkeitsgrad. Ueberdies wird die Verschiedenheit dieses Genauigkeitsgrades noch dadurch erhöht, daß alle Kreisflächen mit der gleichen Anzahl Decimalstellen in Rechnung gebracht werden.

Es ist deshalb nicht unwichtig zu untersuchen, welche Durchmesserdifferenzen bestehen dürfen, damit die erhaltenen Kreisflächen von den wahren, d. h. den, den absolut genauen Durchmessern zukommenden, um höchstens ein constantes Procent p abweichen. Diese Untersuchung ist zuerst von Eduard Heyer geführt worden,*)

*) Supplem. z. allg. Forst- u. Jagdz. V. B. S. 161.

und zwar für den speciellen Fall $p = 1$. Für diesen Werth von p findet Heyer, daß die Durchmesser in acht Gruppen zerfällt werden müssen, innerhalb welcher die Durchmesserabstufungen folgende sein dürfen:

Gruppe	Enthält die Durchmesser von	Mit einer Abstufung von
1	0,75 bis 1,4937 Cent,	0,00625 Cent,
2	1,50 „ 2,4875 „	0,0125 „
3	2,50 „ 4,975 „	0,025 „
4	5,00 „ 12,450 „	0,050 „
5	12,50 „ 24,875 „	0,125 „
6	25,00 „ 59,750 „	0,250 „
7	60,00 „ 124,375 „	0,625 „
8	125,00 „ 151,250 „	1,250 „

Natürlich sind bei Anwendung dieses Systemes der Messung mehrere Kluppen nothwendig, von denen die eine für die Gruppen 1 bis 5 von Metall sein und deren Nonius 0,1 Millimeter angeben müßte, während die zweite, hölzerne, eine Theilung bis auf 2 Millimeter zu erhalten hätte und für die Gruppen 6 bis 8 dienen würde.

Das von Heyer seinen Entwickelungen zu Grunde gelegte Verfahren muß a. a. O. nachgelesen werden. Will man von der zu praktischen Zwecken allerdings unumgänglich nöthigen Gruppenbildung absehen und überall die gleiche Anzahl Decimalstellen in den Kreisflächen zur Anwendung bringen, so kann man sich auf folgende Weise eine Uebersicht der Abstufungen verschaffen, welche bei den verschiedenen Durchmessern zulässig sind, damit der Fehler in der Fläche p Procent nicht überschreite.

Wir haben oben §. 6. den Einfluß eines Durchmesserfehlers auf die zugehörige Kreisfläche in Procenten gefunden zu

$$p = \frac{\Delta}{D} \, 200.$$

Sieht man nun in dieser Gleichung p als gegeben, Δ als unbekannt an, so wird letzteres die Abstufung sein, welche einem Flächenfehler p entspricht. Aus der angeführten Gleichung folgt aber leicht

$$\Delta = \frac{p}{200} \, D.$$

Setzt man in dieser letzteren Formel für D alle auf einander folgende Durchmesser, so kann man sich leicht eine kleine Tafel bilden, welche die zulässigen Abstufungen unmittelbar angiebt. In der nachfolgenden Tabelle ist $p = 1$ gesetzt.

D	Δ	D	Δ
1 Cent	0,005 Cent	40 Cent	0,200 Cent
2 "	0,010 "	50 "	0,250 "
3 "	0,015 "	60 "	0,300 "
4 "	0,020 "	70 "	0,350 "
5 "	0,025 "	80 "	0,400 "
10 "	0,050 "	90 "	0,450 "
20 "	0,100 "	100 "	0,500 "
30 "	0,150 "	150 "	0,750 "

§. 17

Die Methoden und Formeln der Praxis zur Inhaltsberechnung der Baumschäfte.

1. Die erste Formel, welche zur Berechnung des Inhaltes unentwipfelter Baumstämme in Vorschlag gebracht wurde, war die für den geradseitigen Kegel*)

$$V = \frac{1}{3} GH.$$

Für abgewipfelte Stämme hätte dem entsprechend dann die Inhaltsformel des geradseitigen Kegelstumpfes

$$v = \frac{1}{3} (G + \sqrt{Gg} + g)\ h$$

in Anwendung kommen müssen, doch ist dieselbe nur selten gebraucht worden; **) so z. B. hat sie Grabner ***) zur Construction von Tafeln benutzt, welche drei Eingänge (für D, d und h) besitzen und in Folge dessen für den Gebrauch ziemlich unbequem sind. Da solche Tafeln außerdem der Ausbauchung keine Rechnung tragen, den Inhalt also in den allermeisten Fällen viel zu klein angeben, (wenn man sich nicht auf sehr kurze

*) Oettelt, Practischer Beweis, daß die Mathesis bei dem Forstwesen unentbehrliche Dienste thue. Eisenach. 1765. §. 105.

**) In eigenthümlicher Weise u. a. von von Voigt, Beherzigungen für diejenigen, welche sich dem Forsthaushalte als Vorgesetzte zu widmen denken. Lemgo. 1782. v. Voigt findet den Inhalt des Stumpfes dadurch, daß er sich letzteren zum Vollkörper ergänzt denkt, die Ergänzungshöhe H' aus D, d und h berechnet und nun die Differenz der beiden Körper $\frac{1}{3}$ GH und $\frac{1}{3}$ gH' bildet.

***) Grabner, L. Tafeln zur Bestimmung des kubischen Inhaltes walzen- und kegelförmiger Nutz- und Bauholzstücke, der Klafterhölzer und ganzer Holzbestände, sowie zur Preisberechnung des Holzes nach dem Kubikfuße. Wien 1840. 8.

Stücke beschränkt), so ist deren Gebrauch in keiner Weise zu empfehlen.

2. Die mit der Anwendung der Formel für den geradseitigen Kegelstumpf verbundenen Unbequemlichkeiten haben wahrscheinlich zu der Berechnung des Inhaltes aus dem sogenannten geglichenen Durchmesser $\frac{1}{2}(D + d)$ nach der Formel

$$v = \frac{\pi}{4}\left(\frac{D + d}{2}\right)^2 h$$

geführt. Vergleicht man dieselbe mit der Inhaltsformel für den geradseitigen Kegelstumpf, die wir mit v_k bezeichnen wollen, so ist

$$\begin{aligned} v_k - v &= \frac{\pi}{12}(D^2 + Dd + d^2)\,h - \frac{\pi}{4}\left(\frac{D + d}{2}\right)^2 h \\ &= \frac{\pi}{12}\left(\frac{D^2 - 2Dd + d^2}{4}\right) h \\ &= \frac{\pi}{12}\left(\frac{D - d}{2}\right)^2 h, \end{aligned}$$

mithin

$$v_k = v + \frac{\pi}{12}\left(\frac{D - d}{2}\right)^2 h \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 1)$$

Die oben angeführte Rechnungsregel giebt daher den Inhalt eines abgewipfelten Baumschaftes um den Inhalt eines Kegels zu klein an, welcher mit dem Schaftstücke gleiche Höhe und die halbe Differenz des oberen und unteren Durchmessers zur Grundstärke hat.

Benutzen wir die Zahlen des früher §. 15. gebrauchten Beispieles auch hier, so haben wir $D = 17{,}9$ Cent, $d = 6{,}9$ Cent, $h = 12$ Meter. Daraus ergiebt sich $G = 0{,}025165$, $g = 0{,}003739$, $\sqrt{Gg} = 0{,}009694$ Quadratmeter, mithin, da $h = 4$ Meter,

$$v_k = 0{,}154392 \text{ Cubicmeter}$$

Dagegen erhält man den geglichenen Durchmesser zu $\frac{1}{2}(17{,}9 + 6{,}9)$ $= 12{,}4$ Cent, die zugehörige Kreisfläche gleich 0,012076 Quadratmeter, und für $h = 12$

$$v = 0{,}144912 \text{ Cubicmeter},$$

folglich den Inhalt zu klein um 6,1 Procent.

Der Volumenfehler von v in Procenten von v_k läßt sich auch ohne Ausführung der Inhaltsberechnung finden. Derselbe ist nämlich einmal gleich

$$\frac{p}{100}\left[\frac{\pi}{4}\left(\frac{D + d}{2}\right)^2 h + \frac{\pi}{12}\left(\frac{D - d}{2}\right)^2 h\right],$$

dann aber auch gleich

$$\frac{\pi}{12}\left(\frac{D-d}{2}\right)^2 h,$$

so daß

$$\frac{p}{100}\left[\frac{\pi}{4}\left(\frac{D+d}{2}\right)^2 h + \frac{\pi}{12}\left(\frac{D-d}{2}\right)^2 h\right] = \frac{\pi}{12}\left(\frac{D-d}{2}\right)^2 h$$

ist. Hieraus folgt

$$p = \frac{\left(\frac{D-d}{2}\right)^2}{3\left(\frac{D+d}{2}\right)^2 + \left(\frac{D-d}{2}\right)^2}\,100 = \frac{1}{3\left(\frac{D+d}{D-d}\right)^2 + 1}\,100.$$

Für unser Beispiel geht diese Formel über in

$$p = \frac{1}{3\left(\frac{24{,}8}{11}\right)^2 + 1}\,100 = 6{,}1 \text{ Procent}$$

wie oben.

Da $\left(\frac{D+d}{D-d}\right)^2$ stets positiv sein muß und nicht kleiner als die Einheit werden kann, so erhält p seinen größten Werth, wenn $\frac{D+d}{D-d} = 1$, d. h. wenn $d = 0$. Dieser größte Fehler beträgt mithin $\frac{100}{4}$ oder 25 Procent, d. h. man würde einen Fehler von 25 Procent begehen, wenn man den geradseitigen Kegel nach der Formel $\frac{\pi}{4}\left(\frac{D}{2}\right)^2 H$ berechnen wollte. Zugleich folgt aus dem Werthe von p noch, daß der Fehler von dem Quotienten $\frac{D+d}{D-d}$ abhängt, mit der Differenz $D - d$ wächst, und abnimmt, wenn diese sich verkleinert.

Eine Vergleichung mit dem Stumpfe des Parabelkegels, für welchen

$$v_p = \frac{\pi}{8}(D^2 + d^2)\,h,$$

ergiebt

$$v_p - v = \frac{\pi}{8}(D^2 + d^2)\,h - \frac{\pi}{4}\left(\frac{D+d}{2}\right)^2 h,$$

$$= \frac{\pi}{4}\left(\frac{D^2}{4} - \frac{2\,Dd}{4} + \frac{d^2}{4}\right) h,$$

$$= \frac{\pi}{4}\left(\frac{D-d}{2}\right)^2 h,$$

somit

$$v_p = v + \frac{\pi}{4}\left(\frac{D-d}{2}\right)^2 h. \qquad \qquad 2)$$

Der Fehler ist mithin in diesem Falle dreimal größer als bei dem Stumpfe des geradseitigen Kegels, nämlich gleich einer Walze, welche mit dem Stumpfe gleiche Höhe und die Differenz des oberen und unteren Durchmessers zur Grundfläche hat. Um diesen Fehler in Procenten des wahren Inhaltes auszudrücken, hat man durch ähnliche Betrachtungen wie oben

$$\frac{p}{100}\left[\frac{\pi}{4}\left(\frac{D+d}{2}\right)^2 h + \frac{\pi}{4}\left(\frac{D-d}{2}\right)^2 h\right] = \frac{\pi}{4}\left(\frac{D-d}{2}\right)^2 h,$$

und daraus

$$p = \frac{\left(\frac{D-d}{2}\right)^2}{\left(\frac{D+d}{2}\right)^2 + \left(\frac{D-d}{2}\right)^2} 100 = \frac{1}{\left(\frac{D+d}{D-d}\right)^2 + 1} 100.$$

Für die oben gebrauchten Zahlen wird $p = 16{,}4$ Procent. Das Maximum des Fehlers tritt offenbar wieder ein, wenn $\frac{D+d}{D-d} = 1$, d. h. wenn $d = 0$, oder wenn der Stumpf zum Vollkegel wird und ist dann gleich $\frac{100}{2}$ oder 50 Procent.

Eine Vergleichung mit dem Neiloid endlich ergiebt

$$v_n - v = \frac{\pi}{16}\left[D^2 + \sqrt[3]{D^4 d^2} + \sqrt[3]{D^2 d^4} + d^2\right] h - \frac{\pi}{4}\left(\frac{D+d}{2}\right)^2 h,$$

$$= \frac{\pi}{16}\left[\sqrt[3]{D^4 d^2} + \sqrt[3]{D^2 d^4} - 2\,D\,d\right] h.$$

Schreibt man $2\,D\,d$ in der Form $2\sqrt[3]{D^3 d^3}$, so wird

$$v_n - v = \frac{\pi}{16}\left[\sqrt[3]{D^4 d^2} - 2\sqrt[3]{D^3 d^3} + \sqrt[3]{D^2 d^4}\right] h$$

$$= \frac{\pi}{16}\left[\sqrt[3]{D^2 d} - \sqrt[3]{D\,d^2}\right]^2 h,$$

mithin

$$v_n = v + \frac{\pi}{16}\left[\sqrt[3]{D^2 d} - \sqrt[3]{D\,d^2}\right]^2 h, \quad . \quad . \quad . \quad 3)$$

so daß selbst die Inhaltsformel des Neiloidstumpfes einen größeren Werth liefert als die Walze des geglichenen Durchmessers. Die erstere würde für die obigen Maße ergeben

$$v_n = 0{,}147882 \text{ Cubicmeter},$$

so daß ein Inhaltsfehler von $\frac{0{,}147882 - 0{,}144912}{0{,}147882} 100 = 2{,}0$ Procent sich fände. Dieser Werth würde übrigens auch aus der Gleichung

$$\frac{p}{100}\left[\frac{\pi}{16}\left[D^2+\sqrt[3]{D^4 d^2}+\sqrt[3]{D^2 d^4}+d^2\right]h\right.$$
$$=\frac{\pi}{16}\left[\sqrt[3]{D^2 d}-\sqrt[3]{D d^2}\right]^2 h$$

erhalten werden können, welche giebt

$$p=\frac{\left[\sqrt[3]{D^2 d}-\sqrt[3]{D d^2}\right]^2}{D^2+\sqrt[3]{D^4 d^2}+\sqrt[3]{D^2 d^4}+d^2}\,100.$$

Addirt und subtrahirt man im Nenner dieses Bruches $2\,Dd$, und berücksichtigt wieder, daß $-2\,Dd=-2\sqrt[3]{D^3 d^3}$, so geht der Nenner über in $(D+d)^2+\left[\sqrt[3]{D^2 d}-\sqrt[3]{D d^2}\right]^2$, so daß

$$p=\frac{\left[\sqrt[3]{D^2 d}-\sqrt[3]{D d^2}\right]}{(D+d)^2+\left[\sqrt[3]{D^2 d}-\sqrt[3]{D d^2}\right]^2}\,100$$
$$=\frac{1}{\left(\frac{D+d}{\sqrt[3]{D^2 d}-\sqrt[3]{D d^2}}\right)^2+1}\,100.$$

Setzt man hierin die früher für D und d gebrauchten Werthe ein, so wird $p=2{,}0$ Procent.

Trotzdem daß die Walze des geglichenen Durchmessers den Schaftinhalt in jedem Falle unrichtig, nämlich zu klein giebt, ist doch die Formel $\frac{\pi}{4}\left(\frac{D+d}{2}\right)^2 h$ vielfach und lange bei Berechnung der Stämme und Klotzhölzer benutzt worden*), wenn auch sich früh schon Stimmen erhoben**), welche die Fehlerhaftigkeit dieser Rechnungsweise darlegten; in den Staatsforsthaushalten jedoch scheint dieselbe nun überall beseitigt zu sein.

Der Methode, den Bauminhalt als Walze des geglichenen Durchmessers zu berechnen, hängt aber noch ein zweiter Fehler an, der von den Holzkäufern häufig genug vortheilhaft verwerthet worden ist. Denkt man sich nämlich ein Stammstück von der

---

*) Selbst jetzt noch vermögen Tafeln, welche auf den geglichenen Durchmesser gegründet sind, sich Eingang zu verschaffen, wie die „Tafeln zur Inhaltsbestimmung runder und vierkantiger Hölzer, nebst den vorzüglich in Anwendung gekommenen Formzahlen. Bearbeitet von W. Küttner. Potschappel. Druck und Verlag von A. Fr. Lutze. (1871.) 8.“ beweisen.

**) Bereits Kästner, der bekannte Göttinger Mathematiker, hat diese Fehlerhaftigkeit nachgewiesen. Vergl. Anfangsgr. d. Arithm. Geom. ꝛc. 1. Thl. 1. Abth. S. 423. (5. Aufl.)

Länge h, dem unteren Durchmesser D und dem oberen d, um ein Stück von der Länge η verkürzt, so wird der obere Durchmesser des übrig bleibenden Stückes vergrößert und gleich $d + \Delta$. Der Inhalt v_1 dieses verkürzten Stückes ist dann

$$v_1 = \frac{\pi}{4}\left(\frac{D + d + \Delta}{2}\right)^2 (h - \eta)$$
$$= \frac{\pi}{4}\left(\frac{D + d}{2}\right)^2 h + \frac{\pi}{4}\left(2\,\frac{D + d}{2}\,\frac{\Delta}{2} + \left(\frac{\Delta}{2}\right)^2\right) h$$
$$- \frac{\pi}{4}\left(\frac{D + d}{2}\right)^2 \eta - \frac{\pi}{4}\left(2\,\frac{D + d}{2}\,\frac{\Delta}{2} + \left(\frac{\Delta}{2}\right)^2\right) \eta.$$

Wenn nun

$$\frac{\pi}{4}\left(2\,\frac{D + d}{2}\,\frac{\Delta}{2} + \left(\frac{\Delta}{2}\right)^2\right) h > \frac{\pi}{4}\left(\frac{D + d}{2}\right)^2 \eta$$
$$+ \frac{\pi}{4}\left(2\,\frac{D + d}{2}\,\frac{\Delta}{2} + \left(\frac{\Delta}{2}\right)^2\right) \eta$$

ist, so wird eine Verkürzung der Länge eine Vergrößerung des Inhaltes herbeiführen. Die letztere Gleichung geht über in

$$\left[2\,\frac{D + d}{2}\,\frac{\Delta}{2} + \left(\frac{\Delta}{2}\right)^2\right] (h - \eta) > \left(\frac{D + d}{2}\right)^2 \eta,$$

oder, wenn man links innerhalb der ersten Klammer $\left(\frac{D + d}{2}\right)^2$ addirt und subtrahirt, in

$$\left[\left(\frac{D + d + \Delta}{2}\right)^2 - \left(\frac{D + d}{2}\right)^2\right] (h - \eta) > \left(\frac{D + d}{2}\right)^2 \eta \quad .$$

Zerlegt man links die Differenz der beiden Quadrate auf bekannte Weise in ein Product, so wird

$$\left[\left(D + d + \frac{\Delta}{2}\right) \frac{\Delta}{2}\right] (h - \eta) > \left(\frac{D + d}{2}\right)^2 \eta$$

und daraus

$$\frac{h - \eta}{\eta} > \frac{\left(\frac{D + d}{2}\right)^2}{\left(D + d + \frac{\Delta}{2}\right) \frac{\Delta}{2}} > \frac{D + d}{\left(1 + \frac{\Delta}{2\,(D + d)}\right) 2\,\Delta},$$

oder, wenn man $\frac{\Delta}{2\,(D + d)}$ vernachlässigt, was in den meisten Fällen verstattet sein wird,

$$\frac{h - \eta}{\eta} > \frac{D + d}{2\,\Delta}.$$

Hätte man z. B. den oben benutzten Stamm von 17,9 Cent unterer, 6,9 Cent oberer Stärke und 12 Meter Länge um 2 Meter verkürzt, so würde, wenn

$$\Delta > \frac{D + d}{h - \eta} \eta,$$

also in unserem Falle größer als 2,48 Cent wäre, der Inhalt des verkürzten Stückes größer als der des ursprünglichen sein. In der That hat dieser Stamm bei 10 Meter Länge eine Stärke von 9,5 Cent, so daß $\Delta = 9{,}5 - 6{,}9 = 2{,}6$ Cent, also größer als 2,48 ist. Dann wird $\frac{1}{2} (D + d + \Delta) = 13{,}7$ Cent, und die Walze von dieser Stärke und zehn Meter Länge oder

$$v_1 = 0{,}147411 \text{ Cubicmeter},$$

während der Inhalt von

$$v = 0{,}144912 \text{ Cubicmeter}$$

war, so daß der Theil größer als das Ganze sein würde. Berechnet man den oberen Abschnitt auf gleiche Weise, so ist dessen Inhalt gleich 0,010562 Cubicmeter; aus beiden Theilen folgt dann der Inhalt des Ganzen gleich 0,157973 Cubicmeter.

Die Fehlerhaftigkeit der Rechnung nach der Walze des geglichenen Durchmessers hat man auf verschiedene Weise zu verbessern gesucht. Einmal dadurch, daß man aus einer größeren Anzahl genau gemessener und cubirter Stämme einen Normalbaum ableitete, und aus dem letzteren Factoren bestimmte, mit welchen man das Product $\frac{\pi}{4} \left(\frac{D + d}{2}\right)^2 h$ multiplicirte.*) Dann fügte man wohl auch noch die Vorschrift hinzu, daß die Abwipfelung des Stammes so geschehen müsse, daß der obere Durchmesser immer ein gewisser Theil des unteren $\left(d = \frac{1}{3} D\right)$ sei. Aber auch nach diesen Verbesserungen bleibt die geschilderte Rechnungsmethode eine ganz verwerfliche.

3. In gut organisirten Forstverwaltungen**) ist es jetzt wohl fast allgemein gebräuchlich, den Baumschaft als Parabelkegel zu betrachten und den Inhalt desselben aus der Länge und der in seiner Mitte gemessene Stärke nach der oben entwickelten Formel

$$v = \frac{\pi}{4} \delta^2 h = \gamma h$$

*) Auf diese Weise sind z. B. die Tafeln von Cotta berechnet, in denen auch das bei ihrer Berechnung angewendete, hier nur angedeutete Verfahren nachgelesen werden muß. Dieselben führen den Titel: Tafeln zur Bestimmung des Inhaltes der runden Hölzer, der Klafterhölzer und des Reißigs, sowie zur Berechnung der Nutz- und Bauholz-Preise. Auf allerhöchsten Befehl entworfen. Zweite durchaus umgearbeitete Auflage. Dresden, 1823. 8.

**) Von einigen Forstverwaltungen ist sie schon früh eingeführt worden, von der preußischen nach der Angabe Smalians (Holzmeßkunst, S. 46.) bereits 1817.

zu berechnen*), da diese Formel mit denkbar größter Einfachheit auch eine beträchtliche Genauigkeit verbindet. So fand Riecke**) nach dieser Formel an 48 Stämmen ein Zuwenig von 0,72 Procent, mit Schwankungen von — 9,3 bis + 3,6 Procent; Preßler ***) an 80 Stämmen ein Zuviel von 1,56 Procent, mit Schwankungen von — 9,0 bis + 16,5 Procent; Seidenstickerf†) an 25 Stämmen ein Zuviel von 4,33 Procent; Judeich ††) am 32 Stämmen ein Zuviel von 1,32 Procent mit Schwankungen von — 6,7 bis + 4,8 Procent; Schaal†††) an 300 Stämmen ein Zuviel von 3,78 Procent; wir selbst††††) an 10 Stämmen ein Zuwenig von 2,99 Procent, mit Schwankungen von — 13,7 bis + 8,2 Procent.

Je intensiver die Wirthschaft und je werthvoller das Material ist, desto mehr wird auch die Cubirung sich verfeinern und vor Allem dürfen dann Stämme, die sich besonders durch Länge, Stärke, Vollholzigkeit ꝛc. auszeichnen, nicht mehr aus einer einzigen Stärke berechnet, sondern müssen sectionsweise cubirt werden. Ueber die Anzahl der Sectionen können die oben §. 16. 1. mitgetheilten Erfahrungen einen Anhalt gewähren. Häufig genügt es schon zwei Sectionen anzuwenden, d. h. den Stamm aus den bei ¼ (Untermitte) und ¾ (Obermitte) der Länge gemessenen Stärken und der halben Höhe zu cubiren. Preßler fand a. a. O. darnach 1,53 Procent zu wenig, mit Schwankungen von — 11,9 bis + 7,8 Procent; Seidensticker zu wenig 5,53 Procent; Judeich zu wenig 0,59 Procent mit Schwankungen von — 4,9 bis + 5,3 Procent; wir selbst zu wenig 1,87 Procent, mit Schwankungen von — 4,22 bis + 5,67 Procent. Aus diesen Zahlen folgt, daß durch die Cubirung aus zwei Sectionen die Genauigkeit des Durchschnittsresultates zwar nicht bedeutend vergrößert wird, daß aber dadurch die Grenzen, zwischen welchen die einzelnen Fehler hin- und herschwanken, sehr eingeengt werden.

Anmerkung. Aus §. 12. Gl. 3) u. 4), so wie aus §. 17. Gl. 1.) ergiebt sich unmittelbar der Fehler, welchen man begeht, wenn man die Formeln $V = \gamma H$ und $v = \gamma h$ auf den geradseitigen Kegel und seinen Stumpf anwendet.

Für den Vollkörper des Neiloides folgt dieser Fehler aus §. 14. Gl. 17.) u. 18.) Für den Stumpf dieser Körperform ist, weil

*) Bereits Kästner hat auf die Anwendung dieser Cubirungsmethode aufmerksam gemacht. (Anfangsgr. d. Arithm. Geom. ꝛc. 1. Th. 1. Abth. S. 418. 5. Aufl.

**) Berechnung d. Baumst. S. 74.

***) Tharand. forstl. Jahrb. 12. B. S. 192.

†) Allgem. Forst- u. Jagdz. 1860. S. 106.

††) Allgem. Forst- u. Jagdz. 1861. 117.

†††) Supplem. z. allg. Forst- u. Jagdz. V. B. S. 141.

††††) Tharand. forstl. Jahrb. 19. B. S. 250.

$$\delta^{2/3} = \frac{1}{2} (D^{2/3} + d^{2/3}),$$

$$\gamma h = \frac{1}{8} \left(G + 3 \sqrt[3]{G^2 g} + 3 \sqrt[3]{G g^2} + g \right) h.$$

Zieht man diesen Werth vom Inhalte des Neiloidenstumpfes ab, so wird

$$\begin{aligned} v - \gamma h &= \frac{1}{4} \left(G + \sqrt[3]{G^2 g} + \sqrt[3]{G g^2 + g} \right) h \\ &\quad - \frac{1}{8} \left(G + 3 \sqrt[3]{G^2 g} + 3 \sqrt[3]{G g^2} + g \right) h \\ &= \frac{1}{8} \left(G - \sqrt[3]{G^2 g} - \sqrt[3]{G g^2} + g \right) h. \end{aligned}$$

Setzt man $G = \sqrt[3]{G^3}$, $g = \sqrt[3]{g^3}$, so geht die rechte Seite über in $\left(\sqrt[3]{G} - \sqrt[3]{g} \right) \left(\sqrt[3]{G^2} - \sqrt[3]{g^2} \right)$, und es folgt der Fehler

$$v - \gamma h = \frac{1}{8} \left(\sqrt[3]{G} - \sqrt[3]{g} \right) \left(\sqrt[3]{G^2} - \sqrt[3]{g^2} \right) h,$$

der, da $G > g$, immer positiv sein muß.

4. Von Hoßfeld*) ist der in der Praxis allerdings noch nicht verwerthete Vorschlag gemacht worden, die Stärke der Baumschäfte bei einem Drittheil ihrer Länge zu messen. Für den Inhalt der oben betrachteten drei Kegelformen ergeben sich dann folgende Ausdrücke.

a) Bezeichnet $\mathfrak{d}$ die bei einem Drittheile der Länge gemessene Stärke des geradseitigen Kegels, $\mathfrak{g}$ die diesem Durchmesser entsprechende Fläche, so ist, wenn wir die früher gebrauchten Bezeichnungen beibehalten,

$$\mathfrak{d} : D = \frac{2}{3} H : H = 2 : 3,$$

somit

$$D = \frac{3}{2} \mathfrak{d}.$$

Führt man diesen Werth in die Gleichung $V = \frac{\pi}{12} D^2 H$ ein, so wird

$$V = \frac{3\pi}{16} \mathfrak{d}^2 H \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 4$$

oder auch

$$V = \frac{3}{4} \mathfrak{g} H. \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 5$$

Beim Stumpfe hat man

$$\mathfrak{d} - d : D - d = \frac{2}{3} h : h = 2 : 3$$

¹) Prakt. Stereometrie. S. 123.

und daraus

$$D = \frac{1}{2}\left(3\,\mathfrak{d} - d\right).$$

Nach Einsetzung dieses Ausdruckes in die Formel $v = \frac{\pi}{12}(D^2 + Dd + d^2)\,h$ geht die letztere über in

$$V = \frac{\pi}{16}\,(3\,\mathfrak{d}^2 + d^2)\,h \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 6)$$

oder in

$$V = \frac{1}{4}\,(3\,\mathfrak{g} + g)\,h \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 7)$$

b) Beim Parabelkegel hat man in ähnlicher Weise

$$\mathfrak{d}^2 : D^2 = \frac{2}{3}\,H : H = 2 : 3$$

und

$$D^2 = \frac{3}{2}\,\mathfrak{d}^2.$$

Aus der Gleichung $V = \frac{\pi}{8}\,D^2 H$ folgen daher die gleichwerthigen

$$V = \frac{3\,\pi}{16}\,\mathfrak{d}^2 H \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 8)$$

und

$$V = \frac{3}{4}\,\mathfrak{g} H. \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 9)$$

Beim Stumpfe des Parabelkegels ist

$$d^2 : \mathfrak{d}^2 = H' : H' + \frac{2}{3}\,h,$$

$$d^2 : D^2 = H' : H' + h,$$

woraus

$$d^2 : \mathfrak{d}^2 - d^2 = H' : \frac{2}{3}\,h,$$

$$d^2 : D^2 - d^2 = H : h$$

und

$$\frac{D^2 - d^2}{\mathfrak{d}^2 - d^2} = \frac{3}{2}$$

oder

$$D^2 = \frac{1}{2}\,(3\,\mathfrak{d}^2 - d^2).$$

Setzt man diesen Werth in $v = \frac{\pi}{8}\,(D^2 + d^2)\,h$ ein, so geht diese Formel über in

$$v = \frac{\pi}{16}\,(3\,\mathfrak{d}^2 + d^2)\,h \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 10)$$

oder in

$$v = \frac{1}{4}\,(3\,\mathfrak{g} + g)\,h \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 11)$$

c) Das Neiloid liefert die Proportion

$$\mathfrak{d}^2 : D^2 = \left(\frac{2}{3}\,H\right)^3 : H^3 = 8 : 27,$$

und daraus

$$D^2 = \frac{27}{8}\,\mathfrak{d}^2.$$

Damit wird $V = \frac{\pi}{16}\,D^2 H$ zu

$$V = \frac{27\,\pi}{128}\,\mathfrak{d}^2\,H.$$

Es ist aber $\frac{27}{128} = \frac{3}{16} \cdot \frac{9}{8} = \frac{3}{16}\left(1 + \frac{1}{8}\right)$, somit

$$V = \frac{3\,\pi}{16}\,\mathfrak{d}^2\,H + \frac{1}{8} \cdot \frac{3\,\pi}{16}\,\mathfrak{d}^2\,H \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 12)$$

oder

$$V = \frac{3}{4}\,\mathfrak{g}\,H + \frac{1}{8} \cdot \frac{3}{4}\,\mathfrak{g}\,H \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 13)$$

Beim Stumpfe des Neiloides hat man

$$d^2 : \mathfrak{d}^2 = H'^3 : \left(H' + \frac{2}{3}\,h\right)^3$$

$$d^2 : D^2 = H'^3 : (H' + h)^3,$$

und daraus

$$d^{2/3} : \mathfrak{d}^{2/3} - d^{2/3} = H' : \frac{2}{3}\,h$$

$$d^{2/3} : D^{2/3} - d^{2/3} = H' : h.$$

Dividirt man das untere Verhältniß durch das obere, so wird

$$\frac{D^{2/3} - d^{2/3}}{\mathfrak{d}^{2/3} - d^{2/3}} = \frac{3}{2}$$

und

$$D^{2/3} = \frac{1}{2}\,(3\,\mathfrak{d}^{2/3} - d^{2/3})$$

$$D^2 = \frac{1}{8}\,(3\,\mathfrak{d}^{2/3} - d^{2/3})^3.$$

Führt man diesen Werth in

$$v = \frac{\pi}{16}\left(D^2 + D^{2/3}\,d^{2/3}\,(D^{2/3} + d^{2/3}) + d^2\right) h$$

ein, so erhält man leicht

$$v = \frac{\pi}{16}\left[\frac{27\,\mathfrak{d}^2 - 9\,\mathfrak{d}^{4/3}\,d^{2/3} + 9\,\mathfrak{d}^{2/3}\,d^{4/3} + 5\,d^2}{8}\right] h.$$

Schreibt man hierin für $5\,d^2$ das gleichwerthige $9\,d^2 - 4\,d^2$, so wird

$$v = \frac{\pi}{16}\left[\frac{9\,(3\,\mathfrak{d}^2 + d^2) - 9\,\mathfrak{d}^{4/3}\,d^{2/3} + 9\,\mathfrak{d}^{2/3}\,d^{4/3} - 4\,d^2}{8}\right] h,$$

und wenn man für $9\,(3\,\mathfrak{d}^2 + d^2)$ setzt $8\,(3\,\mathfrak{d}^2 + d^2) + 3\,\mathfrak{d}^2 + d^2$,

$$v = \frac{\pi}{16}(3\,\mathfrak{d}^2 + d^2)\,h + \frac{3\,\pi}{16}\left(\frac{\mathfrak{d}^2 - 3\,\mathfrak{d}^{4/3}d^{2/3} + 3\,\mathfrak{d}^{2/3}d^{4/3} - d^2}{8}\right) h.$$

Erwägt man endlich noch, daß der letzte Klammerausdruck gleich $\left(\frac{\mathfrak{d}^{2/3} - d^{2/3}}{2}\right)^3$ ist, so wird

$$v = \frac{\pi}{16}\,(3\,\mathfrak{d}^2 + d^2)\,h + \frac{3\,\pi}{16}\left(\frac{\mathfrak{d}^{2/3} - d^{2/3}}{2}\right)^3 h \;.\;.\;.\; 14)$$

oder auch

$$v = \frac{1}{4}\,(3\,\mathfrak{g} + g)\,h + \frac{3}{4}\left(\frac{\sqrt[3]{\mathfrak{g}} - \sqrt[3]{g}}{2}\right)^3 h \;.\;.\;.\; 15)$$

Hätte man es im Fällungsbetriebe immer mit unentwipfelten Stämmen zu thun, so würde die Formel

$$V = \frac{3}{4}\,\mathfrak{g}\,H$$

mit großem Vortheile anzuwenden sein, ja in diesem Falle sogar den Vorzug vor der allgemein gebräuchlichen

$$V = \gamma\,H$$

verdienen, weil sie den Inhalt des geradseitigen Kegels und Paraboloides genau, den des Neiloides mit einem geringeren Fehler giebt, als die Cubirung aus der Mittenwalze; und weil die Messung der Durchmesser bei einem Drittheile der Länge sich mit gleicher Leichtigkeit ausführen läßt wie in der Mitte des Stammes. Handelt es sich dagegen um die Cubirung abgewipfelter Hölzer, so paßt sich die Formel

$$v = \frac{1}{4}\,(3\,\mathfrak{g} + g)\,h$$

zwar dem Stumpfe des geradseitigen und Parabelkegels genau, dem des Neiloides mit einem sehr geringen Fehler an, sie erfordert aber die Kenntniß, also Messung, noch eines zweiten, nämlich des oberen Durchmessers, steht mithin an Bequemlichkeit in der Anwendung dem Ausdrucke

$$v = \gamma\,h$$

bedeutend nach. Riecke, der diese Formel sehr empfiehlt, fand mit ihr bei den schon erwähnten 48 Stämmen (a. a. O.) 0,73 Procent zu wenig, mit Schwankungen von $-$ 6,4 bis $+$ 1,4 Procent; Preßler bei 80 Stämmen (a. a. O.) 2,33 Procent zu wenig,

mit Schwankungen von — 15,8 bis + 11,0 Procent. Beide erhielten somit auf diese Weise etwas genauere Resultate als bei der Cubirung aus der Mittenstärke.

Anmerkung 1. Eine Anzahl Cubirungsformeln, welche im Forstbetriebe keine oder nur eine sehr beschränkte Anwendung gefunden haben, wie z. B. die von Rudorf, Walter u. A. finden sich kurz erwähnt in der vorn angeführten Schrift von Riecke.

Anmerkung 2. Ueber Cubirung der Baumschäfte sind ferner noch zu vergleichen:

Preßler, M. R. Fundamente und Regeln einer rationellen Stammcubirung. Tharand. forstl. Jahrb. 10. B. S. 152.

Schmidt, A. Zur Cubirungslehre. — Supplem. zur Monatsch. für Forst- u. Jagdwesen. 1. H. S. 1.

§. 18.

Die Cubirung der Klötze (Bloche) aus der Oberstärke und Länge.

In denjenigen Forsthaushalten, in welchen die Hauptmasse der zur Abgabe gelangenden Nutzhölzer aus Klötzen (Blochen) besteht und wo man diese in größerer Anzahl in Rollen vereinigt, müssen die Mittendurchmesser dieser Hölzer vor dem Zusammenrollen gemessen werden. Um dies zu vermeiden, und da der Werth dieses Nutzholzsortimentes auf dem oberen Durchmesser beruht, nach welchem die Säge eingestellt wird, mißt man in einigen Wirthschaften nur den oberen Durchmesser und vereinigt, um zugleich über den Werthszuwachs der Bäume Erfahrungen zu gewinnen, in den einzelnen Rollen nach gewissen Abstufungen nur Klötze mit nicht allzusehr von einander verschiedenen Oberstärken. Zur Berechnung des Cubicinhaltes der so gemessenen Bloche bedient man sich dann besonderer Tafeln *), deren Angaben aus einer großen Zahl sorgfältig ausgeführter Cubirungen abgeleitet sein müssen.

Das bei der Berechnung solcher Tafeln einzuschlagende Verfahren ist folgendes. Eine möglichst große Anzahl von verschieden langen Klötzen wird nach einer der oben für wissenschaftliche Untersuchungen vorgeschlagenen Formeln aus mehreren Sectionen berechnet. Die Inhalte derjenigen Stücke, welche gleiche Oberstärke und gleiche Länge besitzen, werden zu Summen vereinigt,

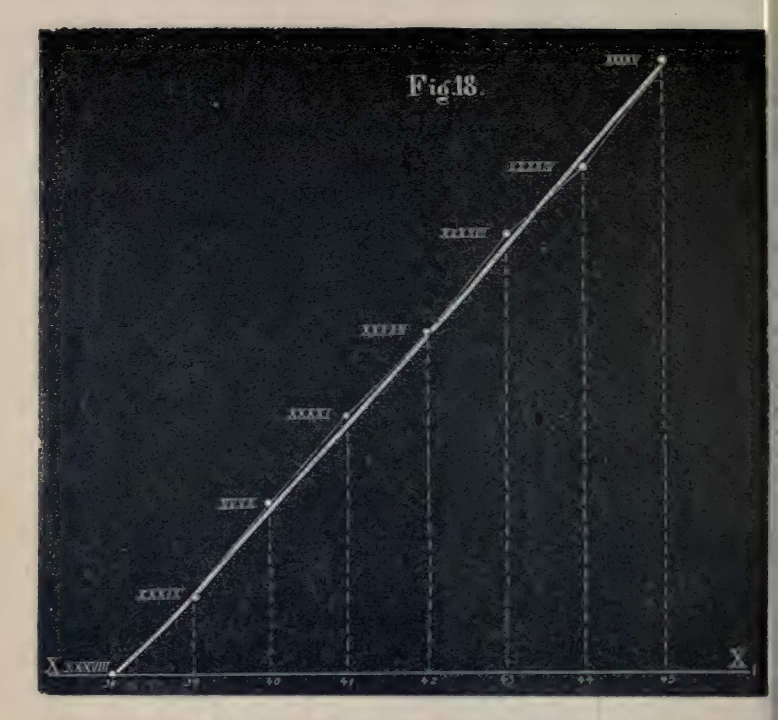
*) Solche Tafeln wurden gleichzeitig von der Königl. sächs. Staatsforstverwaltung und vom Forstdirector Burckhardt (Forstl. Hülfst. II. Abth. S. 65—71.) aufgestellt. Ebenso haben wir selbst nach zahlreichen Ermittelungen (25909 für Fichten und 12270 für Kiefern) eine solche Tafel berechnet. (Massentafel für Nadelholzklötze nach Oberstärke. Dresden, 1870.) Vergl. I. Bd. 1. Abth. Taf. 3.

und jede dieser Summen wird durch die Anzahl ihrer Glieder d. h. durch die Anzahl der in ihr enthaltenen Klötze dividirt. Als Quotienten erhält man dann den mittleren Massengehalt der einzelnen Durchmesserklassen. Hätte man z. B. 257 Stück Fichtenklötze von 20 Cent Oberstärke und 3,4 Meter Länge gemessen und cubirt, und gefunden, daß die Summe ihrer Inhalte 32,46424 Cubicmeter betrüge, so würde der mittlere Inhalt eines solchen Klotzes $\frac{32,46424}{257} = 0,12632$ Cubicmeter sein.

Diese mittleren Inhalte werden, je nachdem sie aus einer größeren oder kleineren Anzahl von Klötzen abgeleitet worden sind, mit kleineren oder größeren Fehlern behaftet sein, welche sich dadurch kundgeben, daß die Differenzen der auf einander folgenden Inhalte keine gesetzmäßig zunehmende Reihe bilden, sondern bald zu- bald abnehmend hin- und herschwanken, wie in der folgenden Tafel, welche einige Zahlen der von uns an 3,4 Meter langen Fichtenklötzen vorgenommenen Messungen und Berechnungen enthält.

Oberstärke. Cent.	Inhalt. Cubicmeter.	Differenz. Cubicmeter.
38	0,427	—
39	0,449	0,022
40	0,473	0,024
41	0,497	0,024
42	0,519	0,022
43	0,545	0,026
44	0,563	0,018
45	0,591	0,028

Zur Verbesserung dieses Fehlers kann man folgenden Weg einschlagen. Auf einer Geraden XX_1 als Axe (Fig. 18. d. f. S.) trägt man von einem beliebigen Anfangspunkte aus nach irgend einem nicht zu kleinen Maßstabe die Strecken 1, 2, 3, 4, ... 38, 39, 40, 41, ... auf, welche den oberen Durchmessern entsprechen, und errichtet in den dadurch erhaltenen äquidistanten Punkten Senkrechte. Mißt man nun die Maßzahlen der Cubicinhalte auf einem beliebigen Maßstabe und trägt sie auf den erwähnten Senkrechten ab, und verbindet die so erhaltenen Punkte I, II, III, IV, ... XXXVIII, XXXIX, XXXX, XXXXI durch einen zusammenhängenden Linienzug, so entsteht eine mit kleinen unregelmäßigen Aus- und Einsprüngen versehene Curve, welche sich dadurch in eine gesetzmäßig verlaufende umwandeln läßt, daß man



eine die Aus- und Einsprünge vermeidende, sonst aber dem ursprünglichen Zuge sich möglichst anschließende neue Curve zieht.*) Dabei ist nur zu beachten, daß die Inhalte im Allgemeinen für um so genauer gehalten werden müssen, aus je mehr Beobachtungen sie abgeleitet sind.

Statt die Cubicinhalte der Klötze unmittelbar auszugleichen, kann man dies auch mit den, auf den oberen Durchmesser bezogenen Formzahlen thun, d. h. mit denjenigen Quotienten, welche entstehen, wenn man den mittleren Inhalt eines Klotzes durch den Inhalt einer Walze dividirt, welche mit dem Klotze gleiche Länge und dessen Oberstärke zum Durchmesser hat. Der oben erwähnte Klotz von 20 Cent Oberstärke und 3,4 Meter Länge würde daher die Formzahl $\frac{0,12632}{0,10681} = 1,183$ haben. Da die

---

*) In Fig. 18. sind die in der obigen kleinen Tafel angegebenen Inhalte der Klötze von 38 bis 45 Cent Oberstärke auf die eben dargelegte Art behandelt. Die den Oberstärken entsprechenden Punkte 38, 39, 40 ... 45 haben eine Entfernung von 1 Cent; um für die Ordinaten (Cubicinhalte) nicht zu große Zahlen zu erhalten, ist der Inhalt des Klotzes von 38 Cent Oberstärke oder 0,427 von den übrigen abgezogen. Die Differenzen 0,449 — 0,427 2c. sind dann so aufgetragen, daß 0,001 Cubicmeter = 0,5 Millimeter. Endlich ist noch angenommen worden, daß die Inhalte der Klötze von 38 und 45 Cent Oberstärke (Anfang- und Endordinate) genau richtig seien.

schwächeren Klötze, weil jüngeren Hölzern oder den oberen Theilen der Stämme entspringend, verhältnißmäßig mehr abfallen als die stärkeren, so müssen die Formzahlen der ersteren größer sein als die der letzteren. Jedoch können, da der obere Durchmesser stets kleiner ist als der untere, diese Formzahlen nie unter die Einheit herabsinken. Das oben für die Cubicinhalte angegebene Ausgleichungsverfahren gilt natürlich fast wörtlich für die Formzahlen, wenn man nur statt des Wortes „Inhalt" das Wort „Formzahl" setzt.

An Stelle des eben beschriebenen graphischen Verfahrens kann man bei der Ausgleichung der Formzahlen aber auch den Weg der Rechnung einschlagen. Dazu ist jedoch nöthig, daß man aus den Beobachtungen oder sonst wie einige Eigenschaften der von den Formzahlen gebildeten Curve abzuleiten vermag, um die Form der Gleichung dieser Curve wenigstens annähernd bestimmen zu können. Ist diese Bedingung erfüllt, so verdient dieser zweite Weg unbedingt den Vorzug vor dem ersteren, weil dann die sämmtlichen Beobachtungen zur Bestimmung des Laufes der Curve verwendet werden können und der Willkür kein Raum gegeben ist. (Vergl. hierüber Tharand. forstl. Jahrb. 21. B. S. 101.)

§. 19.

Die Cubirung der Stangen aus Unterstärke und Länge.

Das allgemein unter dem Namen „Stangen" bekannte Nutzholzsortiment, welches aus schwachen unentwipfelten Stämmchen besteht, erlaubt der Verwaltung wenigstens in seinen schwächsten Vertretern eine Einzelmessung und Berechnung nicht. Vielmehr muß bei diesem Sortimente eine Vereinigung der in Unterstärke und Länge übereinstimmenden Exemplare stattfinden, wobei die größere oder geringere Intensität des Betriebes über die Weite der Abstufungen in Stärke und Länge zu entscheiden hat. Diese zu je n (10,50,100, . . .) Stück vereinigten gleichstarken und gleichlangen Stangen werden ebenfalls nach Erfahrungstafeln berechnet, welche ähnlich wie diejenigen für die Klötze construirt werden. Auch hier bildet man sich aus einer großen Zahl genau gemessener Stangen Mittelwerthe für die Inhalte von je 100 Stück, welche von Cent zu Cent in der Stärke und von Meter zu Meter in der Länge abgestuft sind. Diese Mittelwerthe kann man dann graphisch unmittelbar ausgleichen, oder auch deren auf die Unterstärke bezogene Formzahlen, welche man erhält, wenn man die Inhaltsmittel durch die Walzen der unteren Durchmesser dividirt. Will man die Formzahlen durch Rechnung verbessern, so müssen

für dieselben die gleichen Bedingungen erfüllt sein, wie für diejenigen der Klötze. *)

§. 20.

Cubirungsmethoden und Formeln für unregelmäßige Schaftstücke, so wie für Ast-, Reis- und Stockholz bei wissenschaftlichen Untersuchungen.

1. Von Baumtheilen, welche nicht als regelmäßigen Körpern nahe kommend angesehen werden können, muß bei wissenschaftlichen Untersuchungen die Inhaltsbestimmung durch Aichung erfolgen. Dazu wird das Aichgefäß horizontal gestellt, indem man durch untergeschobene Holzkeile das Pendel an der Marke zum Einspielen bringt, zum Theil mit Wasser gefüllt und der Stand des letzteren an der eingetheilten Röhre abgelesen. Sodann taucht man das zu messende Holzstück mit Hülfe des oben (§. 9.) beschriebenen Drahtquirles ganz unter und liest den Stand des Wassers von Neuem ab. Die Differenz beider Ablesungen giebt den Cubicinhalt des eingetauchten Holzstückes. Größere Stämme und Stockholzstücke muß man einzeln eintauchen, schwächere Aeste, Reisholz u. dgl. dagegen bindet man in Bündel zusammen, da die Ablesungsfehler bei allzu vielen kleinen Stücken sich häufen und die Genauigkeit des Resultates beeinträchtigen würden.

Als Beispiel hierzu wollen wir unseren Untersuchungen über die Massengehalte der Stangen einige Zahlen entnehmen. Es wurden u. A. 30 Stück 3 Cent starke und 2,5 Meter lange Fichtenstangen in 0,85 Meter lange Stücke geschnitten und in zwei Bündel gebunden. Das Aichgefäß ergab vor dem Eintauchen des ersten Bündels die Ablesung 0,0934, vor dem Eintauchen des zweiten 0,0933. Nach dem Eintauchen waren die bezüglichen Ablesungen 0,1124 und 0,1130. Die Differenzen dieser Ablesungen sind 0,0190 und 0,0197, so daß der Cubicinhalt dieser 30 Stangen 0,0190 + 0,0197 = 0,0387 Cubicmeter beträgt.

Werden die Cubicinhalte der Holzstücke auf diese Weise gleich nach dem Fällen bestimmt, so wird man eine fast für alle Fälle hinreichende Genauigkeit erhalten. Erfolgt dagegen die Untersuchung erst, nachdem die Hölzer schon etwas abgetrocknet sind, so wird in der Inhaltsbestimmung dadurch, daß die Hölzer beim Eintauchen begierig Wasser aufnehmen, ein kleiner Fehler herbeigeführt, der sich auf folgende Weise unschädlich machen läßt.

Man wiegt das zu untersuchende Holzstück mit einer genauen

*) Die Cubicinhalte der Stangen sind bis jetzt noch sehr wenig untersucht worden. Die ausgedehntesten Untersuchungen hierüber rühren von uns selbst her. Vergl. 1. Bd. 1. Abth. Taf. 5.

Wage, aicht sodann dasselbe auf die eben angegebene Weise und wiegt es nach dem Ausziehen aus dem Wasser nochmals. Hätten, um auch hierfür ein Beispiel zu geben, mehrere Holzstücke vor der Aichung 8,105, nach derselben 8,194 Kilogramm gewogen, so würde der Gewichtsunterschied, d. h. das Gewicht des vom Holze aufgenommenen Wassers, 0,089 Kilogramm betragen haben. Da nun bei mittlerer Temperatur (19° Celsius) ein Cubicmeter reines Wasser 992 Kilogramm (1000 bei + 4° C.) wiegt, so ist der Cubicinhalt des eingesogenen Wassers $\frac{0,089}{992} = 0,00009$ Cubicmeter. Hätte außerdem die Aichung für die betreffenden Stücke eine Differenz der Ablesungen, oder, was dasselbe ist, einen Cubicinhalt von 0,01006 Cubicmeter ergeben, so wäre der gesuchte Inhalt der Holzstücke, 0,01006 − 0,00009 = 0,00997 Cubicmeter.

Da das Gewicht der untersuchten Holzstücke gleich 8,105 Kilogramm, so ist das Gewicht eines Cubicmeters solcher Stücke gleich 8,105 : 0,00997 = 812,94 Kilogramm, und das specifische Gewicht derselben gleich 812,94 : 992 = 0,819.

2. Hat man sehr ausgedehnte Untersuchungen vorzunehmen, so ist das Aichen äußerst zeitraubend. Man kann aber, wenn nicht die größte Schärfe der Resultate gefordert wird, eine Abkürzung der Arbeit dadurch erreichen, daß man die zu aichenden Holzstücke möglichst sorgfältig sortirt, z. B. das Stockholz in eigentliches Stockholz, starkes und schwaches Wurzelholz scheidet u. s. w. Bestimmt man dann von jeder dieser Classen mit Hülfe einer guten Wage das Absolutgewicht $Q_1, Q_2, Q_3, \ldots Q_n$, und von einer aus jedem Sortimente ausgewählten Anzahl Probestücke sowohl das Absolutgewicht $q_1, q_2, q_3, \ldots q_n$, als auch durch Aichung den Cubicinhalt $v_1, v_2, v_3, \ldots v_n$, so hat man nach dem schon oben §. 9. angeführten Satze, daß sich bei demselben Körper die Volumina verhalten, wie die absoluten Gewichte, die Proportionen

$$\begin{aligned} V_1 : v_1 &= Q_1 : q_1 \\ V_2 : v_2 &= Q_2 : q_2 \\ V_3 : v_3 &= Q_3 : q_3 \\ &\vdots \\ V_n : v_n &= Q_n : q_n \end{aligned}$$

und daraus, da $v_1, v_2, v_3 \ldots v_n, Q_1, Q_2, Q_3, \ldots Q_n, q_1, q_2, q_3, \ldots q_n$ bekannt sind,

$$V_1 = \frac{Q_1}{q_1} v_1, \; V_2 = \frac{Q_2}{q_2} v_2, \; V_3 = \frac{Q_3}{q_3} v_3, \ldots$$

$$V_n = \frac{Q_n}{q_n} v_n .$$

Hätte man z. B. von mehreren Bäumen das Stockholz in drei Classen getheilt, dasselbe gewogen und gefunden

das Gewicht des eigentlichen Stockholzes (Q_1) = 253,1 Kilogramm,
" " " starken Wurzelholzes (Q_2) = 250,1 "
" " " schwachen " (Q_3) = 86,4 "

hätte man ferner von jeder dieser Classen eine Anzahl Probestücke gewogen und geaicht, und

das Gewicht der ersten Classe (q_1) = 73,9 Kilogramm,
ihren Inhalt (v_1) = 0,0925 Cubicmeter;
das Gewicht der zweiten Classe (q_2) = 82,3 Kilogramm,
ihren Inhalt (v_2) = 0,0879 Cubicmeter;
das Gewicht der dritten Classe (q_3) = 20,0 Kilogramm,
ihren Inhalt (v_3) = 0,0207 Cubicmeter

erhalten, so wäre

$$V_1 = \frac{253,1}{73,9}\,0,0925 = 0,3168 \text{ Cubicmeter,}$$

$$V_2 = \frac{250,1}{82,3}\,0,0879 = 0,2672 \quad \text{"}$$

$$V_3 = \frac{86,4}{20,0}\,0,0207 = 0,0894 \quad \text{"}$$

der Inhalt des gesammten Stockholzes also 0,6733 Cubicmeter.

3. Wäre man mit einem Aichgefäße nicht versehen, um wenigstens den Inhalt von Probestücken bestimmen zu können, sondern bloß im Besitze einer Wage, so müßte man zur Bestimmung der Cubicinhalte v_1, v_2, v_3, ... v_n dieser Probestücke sich der hydrostatischen Abwägung bedienen, und dann entweder das eben unter 2. dargestellte Verfahren benutzen, oder aber die specifischen Gewichte s_1, s_2, s_3, ... s_n der einzelnen Sortimente berechnen, und dann die in §. 9. gleichfalls schon erwähnte Inhaltsformel

$$V = \frac{Q}{w\,s}$$

anwenden, in welcher Q das Absolutgewicht des zu untersuchenden Körpers, s dessen specifisches Gewicht und w das Gewicht der Cubiceinheit Wasser bedeuten. Zu den Werthen von v_1, v_2, v_3, ... v_n, s_1, s_2, s_3, ... s_n kann man aber auf folgende Weise gelangen. Bekanntlich verliert ein in's Wasser getauchter Körper darin so viel von seinem Gewichte in der Luft, als das von ihm verdrängte Wasser wiegt. Bestimmt man daher das Gewicht eines Körpers in der Luft und im Wasser und das Gewicht der Cubiceinheit des Wassers, so kann man aus diesen drei Größen den Cubicinhalt des eingetauchten Körpers berechnen. Nennen wir das Gewicht des Körpers in der Luft Q, dasselbe im Wasser q,

so beträgt das Gewicht der von dem Körper verdrängten Wassermasse $Q - q$. Ist nun noch das Gewicht der Cubiceinheit des Wassers w, so muß sich diese letztere zum Gewichte des verdrängten Wassers verhalten, wie die Cubiceinheit Wasser zum Volumen des verdrängten Wassers, oder, was dasselbe, zum Volumen des eingetauchten Körpers. Es muß also sein

$$w : Q - q = 1 : V,$$

mithin

$$V = \frac{Q - q}{w}.$$

Auf diese Weise kann man also den Cubikinhalt $v_1, v_2, v_3, \ldots v_n$ der Probestücke der einzelnen Classen finden und dann wie oben verfahren.

Da $V = \frac{Q}{w\,s}$, so hat man auch

$$\frac{Q}{w\,s} = \frac{Q - q}{w}$$

oder

$$s = \frac{Q}{Q - q},$$

mithin, wenn $q_1, q_2, q_3 \ldots q_n$ die Absolutgewichte der Probestücke der einzelnen Classen in der Luft, $q', q'', q''', \ldots q^{(n)}$ diejenigen im Wasser bezeichnen, die specifischen Gewichte der einzelnen Classen

$$s_1 = \frac{q_1}{q_1 - q'}, \; s_2 = \frac{q_2}{q_2 - q''}, \; s_3 = \frac{q_3}{q_3 - q'''}, \ldots s_n = \frac{q_n}{q_n - q^{(n)}}.$$

Damit finden sich dann die Volumina der einzelnen Classen zu

$$V_1 = \frac{Q_1}{w\,s_1}, \; V_2 = \frac{Q_2}{w\,s_2}, \; V_3 = \frac{Q_3}{w\,s_3}, \ldots V_n = \frac{Q_n}{w\,s_n}.$$

Weil die meisten Hölzer specifisch leichter sind als Wasser, also in demselben nicht untersinken, so muß man, damit dies geschehe, die Holzstücke mit Körpern von hohem specifischem Gewicht, z. B. mit Metallcylindern, verbinden, vorher jedoch das Gewicht dieser Hülfskörper sowohl in der Luft (Q_m) als im Wasser (q_m) ermitteln. Ist sodann das Gewicht beider Körper, des Holzes und Metalles, in der Luft Q_s, im Wasser q_s, so ist das Gewicht des von ihnen verdrängten Wassers $Q_s - q_s$, das Gewicht des von dem Metalle verdrängten Wassers $Q_m - q_m$, mithin das Gewicht des vom Holze allein verdrängten Wassers $Q_s - q_s - (Q_m - q_m)$, woraus sich wie oben das Volumen des vom Holze verdrängten Wassers oder das ihm gleiche des eingetauchten Holzes zu

$$V = \frac{Q_s - q_s - (Q_m - q_m)}{w}$$

ergiebt, wo w die frühere Bedeutung hat. Setzt man noch das Gewicht des Holzes in der Luft gleich Q_h, so erhält man

$$s = \frac{Q_h}{Q_s - q_s - (Q_m - q_m)}.$$

Als Beispiel mögen folgende Zahlen dienen. Es wogen

1. in der Luft

der Metallcylinder (Q_m) . . . . 5,000 Kilogramm,
dieser und das Holz (Q_s) . . . . 40,415 „

2. im Wasser

der Metallcylinder (q_m) . . . . 4,593 Kilogramm,
dieser und das Holz (q_s) . . . . 1,368 „

Es betrug mithin das Gewicht des vom Holze verdrängten Wassers oder $Q_s - q_s - (Q_m - q_m) = 40{,}415 - 1{,}368 - (5{,}000 - 4{,}593) = 38{,}640$ Kilogramm, und, das Gewicht des Cubicmeters Wasser bei mittlerer Temperatur (19° C.) gleich 992 Kilogramm vorausgesetzt, das Volumen des eingetauchten Holzes oder

$$V = \frac{38{,}640}{992} = 0{,}0389 \text{ Cubicmeter},$$

und das specifische Gewicht desselben

$$s = \frac{40{,}415 - 5{,}000}{38{,}640} = 0{,}917.$$

Endlich würde noch ein Cubicmeter dieses Holzes

$$\frac{40{,}415 - 5{,}000}{0{,}0389} = 910{,}3 \text{ Kilogramm wiegen.}$$

Will man noch genauer verfahren, so darf man das Gewicht des Cubicmeters Wasser bei mittlerer Temperatur nicht ohne Weiteres gleich 992 Kilogramm annehmen, sondern muß mit Hülfe eines Aräometers die Dichte des Wassers bestimmen, die gleich σ sein mag, woraus dann $w = 1000\,\sigma$. Wäre z. B. $\sigma = 1{,}005$ gefunden worden, so wäre der Divisor 1005, für $\sigma = 0{,}995$ dagegen erhielte man den Divisor 995.

Da das specifische Gewicht der Baumtheile nach Jahreszeit, Standort, Alter rc. wechselt, so darf dasselbe bei Untersuchungen, welche Anspruch auf Genauigkeit machen, nicht aus einer der vielen bereits über specifische Gewichte der Hölzer mitgetheilten Zusammenstellungen entnommen werden, sondern man muß dasselbe bei jeder Untersuchung an sorgfältig gewählten Probestücken immer neu ermitteln.

§. 21.

Die Inhaltsberechnung der Schichtmaße.

1. Diejenigen Baumschäfte oder deren Theile, welche nicht als Stämme oder Klötze verwerthet werden können, desgleichen stärkere Aeste, werden in kürzere Stücke von gleicher Länge zerlegt und entweder ganz oder in mehrere Theile zerspalten in Schichtmaße von bestimmter Breite und Höhe aufgesetzt, welche verschiedene Namen, wie Klafter, Malter, Stecken ꝛc. führen. Die aus gespaltenen Stücken aufgesetzten Maße heißen Scheite oder Scheide, die von ungespaltenen schwächeren Stücken errichteten Klöppel, Kloben, Rollen ꝛc., die aus winkelig gebogenen Aesten aufgesetzten Zacken u. s. w. Auch vom Stockholze werden derartige Schichtmaße gebildet. Alles unter einen gewissen Durchmesser herabsinkende Holz des Stammes und die schwachen Aeste und Zweige endlich werden als Reisholz (Reisig) bezeichnet, und in Gebunde (Wellen) von bestimmter Länge und bestimmtem Umfange gebunden, von denen man womöglich 100 Stück zusammensetzt.

Für die Wirthschaft ist es aber nicht genügend die Zahl der Klaftern und der Wellenhunderte zu kennen, welche jährlich zur Aufbereitung gelangen, sie muß auch den Cubicinhalt der in diesen Maßen enthaltenen Holzmasse angeben können. Dazu ist es nöthig, die Massengehalte einer großen Zahl solcher Schichtmaße zu ermitteln und aus denselben Mittelwerthe abzuleiten, welche zur Ueberführung des Raumes in feste Maße, oder wie man sich kürzer auszudrücken pflegt, zur Verwandlung der Raummeter in Festmeter dienen.

Sollen solche Mittelzahlen mit Vortheil angewendet werden können, d. h. sollen die mit ihrer Hülfe berechneten Massen der Wahrheit wirklich nahe kommen, so muß die Aufarbeitung der Schichtmaße eine möglichst gleichförmige sein. Dazu müssen, was die Scheit- und Klöppelklaftern angeht, die einzelnen Trumme sorgfältig von Aesten befreit werden, welche hart an den Trummen glatt abzuhauen sind. Ferner müssen Vorschriften darüber gegeben sein, innerhalb welcher Durchmessergrenzen die Abschnitte ungespalten bleiben oder, was dasselbe ist, welche Stücke in die Klöppelklaftern eingelegt werden sollen. Bei den Scheiten muß endlich noch festgestellt werden, wie lang die Rindenseite der Spaltlinge sein darf.

Auch die Begrenzung der Schichtmaße, ob dieselbe nämlich aus einer oder aus zwei Stützen jederseits besteht, verdient Berücksichtigung, da bei mehreren Stützen der Inhalt der Schichtmaße

ein kleinerer wird als bei einer einzigen. Ebenso ist streng darauf zu sehen, daß an Berghängen, nachdem die Stützen auf der einen Seite eingeschlagen sind, das Längenmaß zur Abmessung der Weite mit diesen Stützen genau einen rechten Winkel bilde. Würde man diese Vorsicht vernachlässigen und auch bei geneigtem Boden das Maß unmittelbar auf den Boden auflegen, so erhielte die Klafter nicht die Weite b, sondern b cos α, wenn α der Neigungswinkel des Bodens gegen den Horizont ist, und der Raum der Klafter würde nicht bhl, sonder bhl cos α sein, wenn h die Höhe der Klafter und l die Scheitlänge bedeuten. Die durch diese Nachlässigkeit entstehenden Fehler im Raume verhalten sich also wie die Cosinus der Neigungswinkel des Bodens.

Für $\alpha = 5^\circ$ ist der Cosinus = 0,996, der Fehler also 0,004 des Klafterraumes.

Für $\alpha = 10^\circ$ ist der Cosinus = 0,985, der Fehler also 0,015 des Klafterraumes.

Für $\alpha = 15^\circ$ ist der Cosinus = 0,966, der Fehler also 0,034 des Klafterraumes.

Für $\alpha = 20^\circ$ ist der Cosinus = 0,940, der Fehler also 0,060 des Klafterraumes.

Für $\alpha = 25^\circ$ ist der Cosinus = 0,906, der Fehler also 0,094 des Klafterraumes.

Auf den Inhalt der Scheit- und Klöppelklaftern hat vor Allem die Länge der Trumme Einfluß, da mit dieser sich die Fehlerquellen vermehren. Je kleiner also die Länge der Trumme um so größer wird der Gehalt der Klaftern an Holzmasse im Verhältniß zum Raume derselben sein. Auf den Inhalt des Reisigs üben besonders Einfluß Holzart und Holzalter. So werden Reisigwellen aus Durchforstungshölzern im Inhalte bedeutend abweichen von den auf Hochwaldschlägen gewonnenen, und man wird bei diesem Sortimente, wenn man einigermaßen verläßliche Inhaltsangaben erhalten will, gleichfalls mehrere Classen bilden müssen.

2. Die Ermittelung des Cubicinhaltes der Scheitklaftern wird am Einfachsten dadurch geschehen, daß man die zur Füllung der Klaftern nöthigen Trumme vor dem Spalten in der Mitte ihrer Länge mißt und dieselben als Walzen dieser Mittendurchmesser berechnet. Da die Länge der Trumme höchstens zwei Meter betragen wird, so wird durch dieses Verfahren der Inhalt der einzelnen Walzen mit hinlänglicher Genauigkeit erhalten.

Hätte man z. B. gefunden, daß, um einen Raum von 2 Meter Breite, 1 Meter Höhe und 1 Meter Länge auszufüllen, eilf Trumme nöthig waren, und zwar:

1 Trumm v. 29,3 C. Mittenstärke u. 0,067426 Quadratm. Mittenfläche,
1 „ „ 29,5 „ „ „ 0,068349 „ „
1 „ „ 32,5 „ „ „ 0,082958 „ „
1 „ „ 34,8 „ „ „ 0,095115 „ „
1 „ „ 35,1 „ „ „ 0,096762 „ „
1 „ „ 39,0 „ „ „ 9,119459 „ „
1 „ „ 44,8 „ „ „ 0,157633 „ „
1 „ „ 45,5 „ „ „ 0,162597 „ „
1 „ „ 47,4 „ „ „ 0,176460 „ „
1 „ „ 48,4 „ „ „ 0,183984 „ „
1 „ „ 59,7 „ „ „ 0,279923 „ „

so wäre die Summe dieser Mittenflächen gleich 1,490666 Quadratmeter, der Cubicinhalt des in diesen zwei Raummetern enthaltenen Holzes 1,490666 Cubicmeter, der Holzgehalt eines Raummeters also gleich 0,745333 Cubicmeter. Verfährt man auf diese Weise mit einer sehr großen Zahl von Raummaßen und nimmt aus den so erhaltenen Zahlen das Mittel, so wird man dasselbe zur Uebertragung des Raumes in feste Masse benutzen können, ohne fürchten zn müsseu, daß sich das Resultat allzuweit von der Wahrheit entferne. Für die Klöppelklaftern hat natürlich dasselbe Verfahren Platz zu greifen.

Zur Ermittelung des Massengehaltes der Stockklaftern wird man sich der Aichung und Wägung bedienen, indem man eine größere Zahl Probestücke aicht und wiegt, sowie auch das Gewicht der ganzen zu untersuchenden Stockholzmasse bestimmt. Gleicherweise verfährt man mit dem Reisholze.*)

Hätte man z. B. überhaupt 1120 Wellen von 0,7 Meter Länge und 1 Meter Umfang zur Untersuchung bestimmt und deren Gewicht gleich 3641,39 Kilogramm gefunden, außerdem aber von 100 Stück derselben das Gewicht zu 340,68 Kilogramm und den Cubicinhalt durch Aichung gleich 1,4673 Cubicmeter erhalten, so würde 1 Kilogramm Reisholz $= \frac{1,4673}{340,68}$ Cubicmeter sein und 3641,39 Kilogramm dieses Sortimentes würden $\frac{1,4673 \cdot 3641,39}{340,68} = 15,6834$ Cubicmeter einnehmen, so daß 100 Stück Wellen $\frac{15,6834 \cdot 100}{1120} = 1,4003$ Cubicmeter enthalten würden.

Um daher die Raumklaftern und Wellenhunderte in feste Masse (Festcubicmeter) überzuführen, hat man die Anzahl derselben nur mit den Maßzahlen ihrer Cubicinhalte zu multipliciren. Umgekehrt kann man aus den Cubicinhalten die Zahl der Raummeter und

*) Erfahrungszahlen über den Massengehalt der Klafterhölzer und des Reisigs finden sich u. A. im I. Bd. 1. Abth. Taf. 6.

Wellenhunderte finden, wenn man die ersteren durch die Maßzahlen des Holzgehaltes eines Raummeters oder Wellenhundertes dividirt.

§. 22.

Die Berechnung der Rindenmasse.

Von einzelnen Holzarten findet die Rinde eine besondere Verwerthung, und zwar wird dieselbe entweder nach dem Raume oder nach dem Gewichte abgegeben. Wenn sie nach dem Raume verkauft wird, so geschieht dies entweder in Schichtmaßen, wie z. B. die Rinde starker Tannen, welche an einigen Orten ein gesuchtes Brennmaterial ist, oder nach Festcubicmetern, wie die zum Gerben bestinmte Rinde der Fichte, deren Inhalt aus dem Inhalte des geschälten Holzes berechnet wird. Die Eichengerbrinde endlich wird meistens nach dem Gewichte verwerthet, und hier wird man das Gewicht in das entsprechende Volumen umzuwandeln haben.

Die Bestimmung des Cubicinhaltes der Rinde bietet in keinem dieser Fälle Schwierigkeiten dar. Die Ermittelung des Inhaltes der Rindenklaftern kann einmal durch Aichung und Wägung gefunden werden, und das Verfahren dabei wird dem beim Stock- und Reisholz beschriebenen ganz gleich sein; oder man mißt die Mittendurchmesser der zu schälenden Holztrumme zuerst mit, dann ohne Rinde. Die Differenz der Volumina der Mittenwalzen ist dann gleich dem Cubicinhalte der Rinde dieser Trumme. Natürlich muß man so viele Trummme so behandeln, bis eine genügende Anzahl Raummeter mit Rinde gefüllt ist. Das Mittel aus den Cubicinhalten derselben wird man dann als Reductionsfactor zur Ueberführung der Rindenklaftern in feste Masse benutzen.*)

Wird die Rinde nicht in Schichtmaßen aufgestellt, so muß man untersuchen, welchen Procentsatz der geschälten Holzmasse die Rinde ausmacht. Dazu zerlegt man die Stamm- und Klotzhölzer in Sectionen, mißt deren Durchmesser vor und nach dem Entrinden, und erhält aus der Differenz der beiden Messungen den Rindengehalt der geschälten Masse. Bei den Brennhölzern kann man ebenso verfahren; kürzer, wenn auch weniger genau, wird man bei diesen aber dadurch zum Ziele gelangen, daß man die entrindeten Hölzer wieder aufklaftern läßt. Aus den auf diese Weise enthaltenen Zahlen berechnet man nun das procentische Verhältniß der Rindenmasse zur Summe der Holz- und Rindenmasse, und benutzt diese Verhältnißzahlen sodann zur Bestimmung der Rindenernte der Schläge.

---

*) Erfahrungszahlen über den Massengehalt der Rindenklaftern finden sich u. A. im I. Bd. 1. Abth. Taf. 6.

a) Hätte man z. B. gefunden, daß 300 Raummeter Brennholz nach dem Entrinden auf 273 dergleichen sich vermindert hätten, so würde die Rinde

$$\frac{300 - 273}{300} 100 = 9 \text{ Procent}$$

oder $^1/_{11}$ der Gesammtmasse betragen, und bei Verkäufen würde dann diese Zahl zur Reduction zu benutzen sein.

b) Eine größere Anzahl Stämme ergab mit der Rinde gemessen einen Inhalt von 631,542 Cubicmeter, nach dem Schälen einen solchen von 573,231 Cubicmeter, mithin einen Rindengehalt von

$$\frac{631{,}542 - 573{,}231}{631{,}542} 100 = \frac{58{,}311}{631{,}542} 100 = 9{,}22 \text{ Procent}$$

der Gesammtmasse.

c) Hätte man nun auf einem Schlage 735,19 Cubicmeter Stamm- und Klotzholz und 90 Raummeter Klöppelholz, so würde der Rindengehalt des ersteren gleich $\frac{735{,}19 \cdot 9{,}22}{100} = 67{,}78$ Cubicmeter; derjenige der Klöppelklaftern $\frac{90 \cdot 9}{100} = 8{,}1$ Raummeter oder $8{,}1 \cdot 0{,}75 = 6{,}08$ Festcubicmeter sein, der Gesammtinhalt der Rinde somit $67{,}78 + 6{,}08 = 73{,}86$ Cubicmeter ausmachen.

Bei Eichenschälwaldstangen müßte man von einer größeren Zahl Probestücken den Rindengehalt v durch Aichung bestimmen, da die Berechnung aus geometrischen Abmessungen wegen der geringen Stärke der Stangen und der Rinde leicht sehr ungenau werden könnte, ebenso würde das Gewicht q der Rinde dieser Probestücke zu ermitteln sein. Dann läßt sich aus dem Gewichte Q der Rindenmasse eines Schlages der Inhalt derselben V nach der Formel

$$V = \frac{Q}{q} v$$

berechnen.

Anhang zum ersten Capitel.

Zusatz 1 (zu §. 6).

Die Berechnung elliptischer Baumquerflächen.

Die Baumquerflächen zeigen meistens keine kreisförmige, sondern eine elliptische Gestalt. Ihr Flächeninhalt E wird unter dieser Voraussetzung und wenn D_g und D_k den größten und kleinsten Durchmesser bezeichnen, ausgedrückt durch

$$E = \frac{\pi}{4} D_g \, D_k \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 1)$$

Gewöhnlich wendet man aber zur Berechnung elliptisch geformter Baumquerschnitte die Formel an

$$E_1 = \frac{\pi}{4} \left(\frac{D_g + D_k}{2} \right)^2 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 2)$$

Da die rechte Seite dieses Ausdruckes auch geschrieben werden kann

$$\frac{\pi}{4} \cdot \frac{4 D_g D_k + D_g^2 - 2 D_g D_k + D_k^2}{4}$$

oder

$$\frac{\pi}{4} \left(D_g D_k + \left(\frac{D_g - D_k}{2} \right)^2 \right),$$

so geht dieselbe über in

$$E_1 = \frac{\pi}{4} \left(D_g \, D_k + \left(\frac{D_g - D_k}{2} \right)^2 \right), \quad . \; . \; . \quad 3)$$

so daß also bei Anwendung der Gl. 2) jede elliptische Fläche um $\frac{\pi}{4} \left(\frac{D_g - D_k}{2} \right)^2$ zu groß gefunden wird.

In der That folgt aus den schon oben (§. 6.) angezogenen Schmidtborn'schen Untersuchungen, daß die nach der gewöhnlichen Rechnungsweise (Gl. 2) aus dem größten und kleinsten Durchmesser berechneten Flächen von 12 Stammscheiben im Durchschnitte um 1,14 Procent zu groß gefunden werden, während die einzelnen Scheiben Abweichungen von — 0,02 bis + 4,71 Procent zeigen; es folgt aus diesen Untersuchungen aber auch, daß nach der genaueren Formel (Gl. 1) ein durchschnittlicher Fehler von nur — 0,34 Procent erhalten wird und daß die einzelnen Scheiben Schwankungen von — 0,09 bis + 4,62 Procent aufweisen. Zwei beliebige, senkrecht aufeinander stehende Durchmesser ergaben nach Gl. 1) behandelt einen durchschnittlichen Flächenfehler von + 2,43 Procent und Einzelfehler von — 3,09 bis + 5,73 Procent.

Größere Untersuchungsreihen werden festzustellen haben, ob aus dem geometrischen Mittel des größten und kleinsten Durch=

messers immer ein so günstiges Resultat zu erwarten ist, wie es die angeführten Schmidtborn'schen Zahlen zeigen. In diesem Falle würde die Berechnung des mittleren Durchmessers D nach der Formel $D = \sqrt{D_g D_k}$ ganz besonders bei der Aufnahme der Holzmassen der Bestände Anwendung finden müssen.

Zusatz 2 (zu §. 15.3).

Ableitung einer allgemeinen Cubirungsformel.

Wäre die Gleichung der Schaftkurve in der Form

$$y^2 = F(x, a, b, c, \ldots)$$

gegeben, wo a, b, c, ... Constanten bedeuten, so würde der Umdrehungskörper dieser Curve oder der Inhalt des Baumschaftes

$$V = \pi \int y^2 dx$$

sein, wo man das Integral von $x = 0$ bis $x = H$ zu nehmen hätte, wenn der Baum unentwipfelt, von $x = H'$ bis $x = H$, wenn er entwipfelt wäre.

Die Ausführung dieser Integration erfordert vor Allem die Kenntniß von $y^2 = F(x, a, b, c, \ldots)$. Da die bis jetzt vorliegenden Untersuchungen jedoch zur Bestimmung dieser Gleichungen durchaus nicht zureichen, so müssen die Integrale $\pi \int_0^H y^2 dx$ und $\pi \int_{H'}^H y^2 dx$ näherungsweise berechnet werden. Nun kann aber, wenn der Raum eines Körpers durch $n + 1$ äquidistante Querflächen $G_0, G_1, G_2 \ldots G_{n-1}, G_n$ mit dem Abstande 1 gegeben ist, eine beliebige Fläche G_x dargestellt werden durch den allgemeinen Ausdruck

$$G_x = G_0 + x\Delta G_0 + \frac{x(x-1)}{1 \cdot 2}\Delta^2 G_0 + \frac{x(x-1)(x-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}\Delta^3 G_0 + \ldots 1)$$

Multiplicirt man diese Gleichung mit dx und integrirt dann zwischen den Grenzen 0 und n, so erhält man das Volumen des zwischen den Flächen G_0 und G_n enthaltenen Körpers

$$V = \int_0^n G_x dx = G_0 \int_0^n dx + \Delta G_0 \int_0^n x dx + \frac{\Delta^2 G_0}{1 \cdot 2} \int_0^n x(x-1) dx + \ldots 2)$$

Ist der Abstand der Querflächen $= h$, so geht dieser Ausdruck über in

$$V = \int_0^{nh} G_x dx = G_0 \int_0^{nh} dx + \Delta G_0 \int_0^{nh} \frac{x}{h} dx + \frac{\Delta^2 G_0}{1 \cdot 2} \int_0^{nh} \frac{x}{h}\left(\frac{x}{h} - 1\right) dx + \ldots 3)$$

Setzt man in der letzteren Gleichung nacheinander n = 1, 2, 3, ... so wird, da bekanntlich

$$\Delta G_0 = G_1 - G_0,$$
$$\Delta^2 G_0 = G_2 - 2G_1 + G_0,$$
$$\Delta^3 G_0 = G_3 - 3G_2 + 3G_1 - G_0,$$
$$\Delta^4 G_0 = G_4 - 4G_3 + 6G_2 - 4G_1 + G_0,$$
$$\vdots$$

1) für n = 1

$$V = \frac{1}{2}\left(G_0 + G_1\right)h;$$

2) für n = 2

$$V = \frac{1}{3}\left(G_0 + 4G_1 + G_2\right)h;$$

3) für n = 3

$$V = \frac{3}{8}\left[G_0 + 3(G_1 + G_2) + G_3\right]h;$$

4) für n = 4

$$V = \frac{1}{45}\left[14(G_0 + G_4) + 64(G_1 + G_3) + 6G_3\right]h;$$

5) für n = 6, wenn man $\frac{41}{140} = \frac{42}{140} = \frac{3}{10}$ annimmt,

$$V = \frac{3}{10}\left[G_0 + G_2 + G_4 + G_6 + 5(G_1 + G_5) + 6G_3\right]h;$$

welch' letztere Formel von Weddle*) herrührt. Berechnet man nach dieser den in §. 15. analysirten Stamm, so hat man

$D_0 = 17{,}9$ Cent, $G_0 = 0{,}025165$ Quadratmeter,
$D_4 = 14{,}0$ „ $G_4 = 0{,}015394$ „
$D_8 = 12{,}1$ „ $G_8 = 0{,}011499$ „
$D_{12} = 6{,}9$ „ $G_{12} = 0{,}003739$ „

$G_0 + \ldots + G_{12} = 0{,}055797$

$D_2 = 15{,}8$ Cent, $G_2 = 0{,}019607$ Quadratmeter,
$D_{10} = 9{,}5$ „ $G_{10} = 0{,}007088$ „

$G_2 + G_{10} = 0{,}026695$ Quadratmeter,
$5(G_2 + G_{10}) = 0{,}133475$ „

$D_6 = 13{,}5$ Cent, $G_6 = 0{,}014314$ Quadratmeter,
$6G_6 = 0{,}085874$ „

Da h = 2 Meter und $G_0 + \ldots + G_{12} + 5(G_2 + G_{10}) + 6G_6 = 0{,}275156$ Quadratmeter ist, so wird

$$V = 0{,}165094 \text{ Cubicmeter},$$

mithin gegen den aus 24 Sectionen nach Simpson's Formel berechneten Inhalt nur um $\frac{0{,}165155 - 0{,}165094}{0{,}165155} 100 = 0{,}04$ Procent zu klein.

---

*) Weddle, Thomas, Professor der Mathematik an der königlichen Militärschule zu Sandhurst, geb. 1817, gest. 1853.

Zusatz 3 (zu §. 15.3).

Ableitung von Newton's Körperformel.

Hängen die parallelen Querflächen G eines Körpers von der über ihnen liegenden Höhe h in der Weise ab, daß

$$G_h = a + bh + ch^2 + dh^3, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 1)$$

so wird das Volumen des von der Fläche G_h begrenzten Körpers

$$V_h = \int (a + bh + ch^2 + dh^3)\, dh$$
$$= ah + \frac{1}{2} bh^2 + \frac{1}{3} ch^3 + \frac{1}{4} dh^4 \quad . \quad . \quad . \quad 2)$$

Die in der halben Höhe befindliche Querfläche ergiebt sich, wenn man in Gl. 1) für h setzt $\frac{1}{2}$ h, zu

$$G_{\frac{1}{2}h} = a + \frac{1}{2} bh + \frac{1}{4} ch^2 + \frac{1}{8} dh^3.$$

Multiplicirt man diese Gleichung mit 4 und addirt zu diesem Producte den Werth der Fläche G_h, sowie den Werth der Fläche $G_0 = a$, so wird

$$G_h + 4G_{\frac{1}{2}h} + G_0 = 6a + 3bh + 2ch^2 + \frac{3}{2} dh^3,$$

und wenn man hier beiderseits mit $\frac{1}{6}$ h multiplicirt,

$$\frac{1}{6} (G_h + 4G_{\frac{1}{2}h} + G_0)\, h = ah + \frac{1}{2} bh^2 + \frac{1}{3} ch^3 + \frac{1}{4} dh^4 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 3)$$

Da die rechte Seite dieses Ausdruckes mit dem unter 2) für V_h gefundenen übereinstimmt, so ist auch

$$V_h = \frac{1}{6} (G_h + 4G_{\frac{1}{2}h} + G_0)\, h \quad . \quad . \quad . \quad 4)$$

Es ist dies die in der forstlichen Literatur gewöhnlich nach dem hochverdientem Oberstudienrath Riecke genannte Formel. Dieselbe ist jedoch bereits von Newton gefunden worden.

Läßt man gleichzeitig drei der Größen a, b, c, d zu Null werden, so erhält man als specielle Fälle der Formel 3) die vier Gleichungen

$$\left.\begin{array}{l} ah \\ \frac{1}{2} bh^2 \\ \frac{1}{3} ch^3 \\ \frac{1}{4} dh^4 \end{array}\right\} = \frac{1}{6} (G_h + 4G_{\frac{1}{2}h} + G_0)\, h,$$

welche der Reihe nach eine Walze, ein Paraboloid, einen geradseitigen Kegel und ein Neiloid darstellen.

Zusatz 4 (zu §. 17.2).
Untersuchungen über die Cubirungsformel

$$\frac{\pi}{4}\left(\frac{D+d}{2}\right)^2 h.$$

Wir haben oben (§.17.2) ganz allgemein, ohne Rücksicht auf eine besondere Körperform, den Nachweis geführt, daß bei der Berechnung des Baumschaftes als Walze des geglichenen Durchmessers der Fall eintreten könne, daß durch Verkürzung der Länge des Schaftes ein Körper erhalten werde, welcher trotz dieser Verkleinerung einen größeren Cubikinhalt besitze, als der ursprüngliche. Es bleibt nun noch übrig die Grenze der Verkürzung zu bestimmen, bis zu welcher ein fortwährendes Wachsthum des Inhaltes stattfindet, so wie den Inhalt des größten Körpers zu berechnen, der bei dieser Verkürzung erhalten werden kann. Zur Lösung dieser beiden Aufgaben müssen wir jedoch die von uns oben betrachteten drei Körper einzeln untersuchen.

1. Verkürzt man den Stumpf des geradseitigen Kegels um die Größe η, so wird, wenn diese Verkürzung zur ganzen Länge des Stumpfes sich wie $n : 1$ verhält, d. h. wenn $\eta = nh$ ist, der durch diese Verkürzung hervorgehende obere Durchmesser d_1 aus der Gleichung

$$\frac{d_1 - d}{D - d} = n$$

zu

$$d_1 = n D + (1 - n) d$$

gefunden. Setzt man diese Werthe von η und d_1 in der Gleichung

$$v = \frac{\pi}{4}\left(\frac{D + d_1}{2}\right)^2 (h - \eta)$$

ein, so wird

$$v = \frac{\pi}{4}\left(\frac{(1+n) D + (1-n) d}{2}\right)^2 (1 - n) h \quad . \quad . \quad 1)$$

Differentiirt man diesen Ausdruck nach n, so erhält man

$$\frac{dv}{dn} = \frac{\pi}{4}\left(\frac{(1+n) D + (1-n) d}{2} (D - d)(1 - n) - \left(\frac{(1+n) D + (1-n) d}{2}\right)^2\right) h,$$

und wenn man die rechte Seite dieser Gleichung gleich Null setzt, nach einigen leichten Rechnungen

$$(D - d)(1 - n) - \frac{(1+n)D + (1-n)d}{2} = o$$

und

$$n = \frac{D - 3d}{3(D - d)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 2)$$

d. h. verkürzt man den Stumpf des geradseitigen Kegels und berechnet die so entstehenden Körper als Walzen des geglichenen Durchmessers, so nimmt der Cubicinhalt dieser Körper fortwährend und so lange zu, bis die Verkürzung $\frac{D-3d}{3(D-d)}$ h beträgt, erreicht für diese Größe sein Maximum und nimmt sodann wieder ab, so daß zu jeder Seite des Maximalschnittes zwei an Länge verschiedene und doch an Inhalt gleiche Körper gefunden werden können. Ebenso wird sich unterhalb des Maximalschnittes ein dem unverkürzten an Inhalt gleicher Körper finden lassen.

Führt man den Werth von n in Gl. 1) sowie in die Werthe von η und d_1 ein, so wird der Cubicinhalt des Maximalkörpers

$$v_{max.} = \frac{\pi}{4} D^2 h \cdot \frac{8}{27} \frac{D}{D - d'} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 3)$$

die Länge desselben gleich $\frac{2D}{3(D-d)}$ h, sein oberer Durchmesser gleich $\frac{1}{3}$ D.

Setzt man in diesen Ausdrücken den oberen Durchmesser d = o, so wird der Stumpf zum Vollkegel und $n = \frac{1}{3}$. Der Maximalkörper des ganzen Kegels wird also dadurch erhalten, daß man die Länge des letzteren um $^1/_3$ verkürzt. Dabei wird der obere Durchmesser gleich $\frac{1}{3}$ des unteren; dies der Grund, warum einige Cubirungstafeln, welche nach der Formel

$$\frac{\pi}{4}\left(\frac{D+d}{2}\right)^2 h$$

arbeiten, den Stamm so abzuwipfeln vorschreiben, daß dessen oberer Durchmesser gleich einem Drittheil des unteren sei. Der Inhalt des Maximalkörpers folgt aus Gl. 3) zu $\frac{\pi}{4} D^2 h \cdot \frac{8}{27}$.

2. Beim Stumpfe des Paraboloides erhält man

$$\eta = hn,$$
$$d_1^2 = n D^2 + (1 - n) d^2,$$

und durch Einführung dieser Werthe

$$v = \frac{\pi}{4}\left(\frac{D + \sqrt{nD^2 + (1-n)\,d^2}}{2}\right)^2 (1-n)\,h \quad . \quad 4)$$

Führt man die Differentiation nach n aus, so wird

$$\frac{dv}{dn} = \frac{\pi}{4}\left[\frac{D + \sqrt{nD^2 + (1-n)\,d^2}}{4\sqrt{nD^2 + (1-n)\,d^2}}\,(D^2 - d^2)\,(1-n) - \left(\frac{D + \sqrt{nD^2 + (1-n)\,d^2}}{2}\right)^2 h\right],$$

und die rechte Seite gleich Null gesetzt, nach einer leichten Kürzung

$$\frac{(D^2 - d^2)\,(1-n)}{\sqrt{nD^2 + (1-n)\,d^2}} - (D + \sqrt{nD^2 + (1-n)\,d^2}) = o.$$

Setzt man hier $\sqrt{nD^2 + (1-n)\,d^2} = \chi$, so wird $n = \frac{\chi^2 - d^2}{D^2 - d^2}$, und damit

$$\frac{(D^2 - d^2)\left(1 - \frac{\chi^2 - d^2}{D^2 - d^2}\right)}{\chi} - (D + \chi) = o$$

oder

$$\chi^2 + \frac{1}{2}\,D\chi - \frac{1}{2}\,D^2 = o,$$

woraus

$$\chi = -\frac{1}{4}\,D \pm \frac{3}{4}\,D.$$

Da nur der Wurzelwerth $\chi = \frac{1}{2}\,D$ statthaft ist, so wird

$$n = \frac{D^2 - 4\,d^2}{4\,(D^2 - d^2)} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 5)$$

Es findet also auch beim Stumpfe des Paraboloides der Umstand statt, daß durch Verkürzung der Länge desselben, wenn man die dadurch entstehenden Körper als Walzen des geglichenen Durchmessers berechnet, der Inhalt dieser Körper fortwährend wächst, bis die Verkürzung den Werth $\frac{D^2 - 4\,d^2}{4\,(D^2 - d^2)}\,h$ erreicht, sodann wieder abnimmt. Der Inhalt des Maximalkörpers wird durch Einführung des Werthes von n in Gleichung 4) zu

$$v_{max.} = \frac{\pi}{4}\,D^2 h \cdot \frac{27}{64}\,\frac{D^2}{D^2 - d^2} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 6)$$

gefunden, die Länge desselben zu $\frac{3\,D^2}{4\,(D^2 - d^2)}\,h$, der obere Durchmesser zu $\frac{1}{2}\,D$.

Der aus dem Vollkörper zu bildende Maximalkörper hat den Inhalt $\frac{\pi}{4} D^2 H \cdot \frac{27}{64}$, die Länge $\frac{3}{4} H$, den oberen Durchmesser gleich $\frac{1}{2} D$.

3. Behandelt man den Stumpf des Neiloides auf gleiche Weise wie die Stumpfe des geradseitigen und Parabelkegels, so wird der der Verkürzung der Länge um $\eta = nh$ entsprechende Durchmesser $d_1 = \sqrt{[n D^{2/3} + (1-n) d^{2/3}]^3}$. Setzt man diese beiden Werthe in die Inhaltsformel

$$v = \frac{\pi}{4} \left(\frac{D + d_1}{2}\right)^2 (h - \eta)$$

ein, so erhält man

$$v = \frac{\pi}{4} \left(\frac{D + \sqrt{[n D^{2/3} + (1-n) d^{2/3}]^3}}{2}\right)^2 (1-n) h \quad . \quad . \quad 7)$$

Wird diese Gleichung nach n differentiirt, so folgt

$$\frac{dv}{dn} = \frac{\pi}{4} \left\{ \frac{3}{4} \left\{D + \sqrt{[n D^{2/3} + (1-n) d^{2/3}]^3}\right\} \sqrt{n D^{2/3} + (1-n) d^{2/3}} \right.$$
$$\left. (D^{2/3} - d^{2/3}) (1-n) - \left(\frac{D + \sqrt{[n D^{2/3} + (1-n) d^{2/3}]^3}}{2}\right)^2 h \right\},$$

und wenn man die rechte Seite dieser Gleichung gleich Null setzt,

$$3 \sqrt{n D^{2/3} + (1-n) d^{2/3}} (D^{2/3} - d^{2/3}) (1-n) -$$
$$\left(D + \sqrt{[n D^{2/3} + (1-n) d^{2/3}]^3}\right) = 0$$

oder

$$\sqrt{n D^{2/3} + (1-n) d^{2/3}} \, [3 (D^{2/3} - d^{2/3}) (1-n) -$$
$$(n D^{2/3} + (1-n) d^{2/3})] - D = 0.$$

Wird für $\sqrt{n D^{2/3} + (1-n) d^{2/3}}$ die neue Unbekannte χ eingeführt, so erhält man

$$n = \frac{\chi^2 - d^{2/3}}{D^{2/3} - d^{2/3}}$$

und damit

$$\chi [3 (D^{2/3} - \chi^2) - \chi^2] - D = 0$$

oder

$$\chi^3 - \frac{3}{4} D^{2/3} \chi + \frac{1}{4} D = 0.$$

Diese cubische Gleichung hat die drei reellen Wurzeln

$$-\sqrt[3]{D}, \; + \frac{1}{2} \sqrt[3]{D}, \; + \frac{1}{2} \sqrt[3]{D},$$

von denen nur die erste genommen werden kann, mit welcher

$$(1-n) D^{2/3} + (1-n) d^{2/3} = 0$$

folgt. Dieser Gleichung läßt sich aber nur durch den Werth

$n = 1$ genügen, d. h. aus dem Stumpfe des Neiloides können durch Verkürzung der Länge keine Körper erhalten werden, welche, als Walzen des geglichenen Durchmessers berechnet, einen größeren Inhalt besitzen als der ursprüngliche Körper. Dasselbe gilt natürlich auch von dem ganzen Neiloide.

Zweites Capitel.

Die Berechnung des Holzgehaltes stehender Bäume.

Einleitung.

§. 23.

Die Methoden der Berechnung des Holzgehaltes stehender Bäume.

Die Berechnung des Holzgehaltes gefällter Hölzer bietet, wie wir im vorigen Capitel gesehen haben, der Ausführung keine sehr großen Hindernisse dar; dafür treten aber der Ermittelung des Inhaltes stehender Bäume bedeutende, zum Theil noch nicht überwundene Schwierigkeiten entgegen. Während wir bei den gefällten Hölzern durch unmittelbares Anlegen der Maßstäbe die zur Berechnung des Inhaltes nöthigen Maßzahlen der Länge und Dicke in jeder beliebigen Anzahl und mit ziemlicher Genauigkeit erheben können, vermögen wir bei stehenden Hölzern diese Elemente höchstens in der Körperhöhe des Beobachters unmittelbar zu erhalten, wenn wir nicht zu Operationen unsere Zuflucht nehmen wollen, die in allen Fällen sehr schwierig, häufig sogar unausführbar sein würden (Besteigung der Bäume mit Leitern ꝛc.). Wir sind deshalb gezwungen die Elemente der Rechnung, nämlich die Höhe des Baumes und die über der Körperlänge des Beobachters liegenden Durchmesser, mittelbar zu messen. Dies geschieht durch Instrumente, die darnach in solche zur Messung der Höhen und in solche zur Messung der Durchmesser zerfallen.

Der Anwendung dieser Instrumente entspringen zwei Methoden zur Bestimmung des Holzgehaltes stehender Bäume, nämlich die Sectionscubirung und Preßlers Richthöhenmethode.

Man sieht aber bei stehenden Bäumen häufig von jeder Messung ab und begnügt sich, den Holzgehalt derselben zu schätzen, indem man sich dabei entweder nur der erworbenen Uebung des Auges bedient, d. h. Ocularschätzung anwendet, oder indem man auch von den Erfahrungen Anderer Gebrauch macht und Baummassentafeln und Formzahlen benutzt.

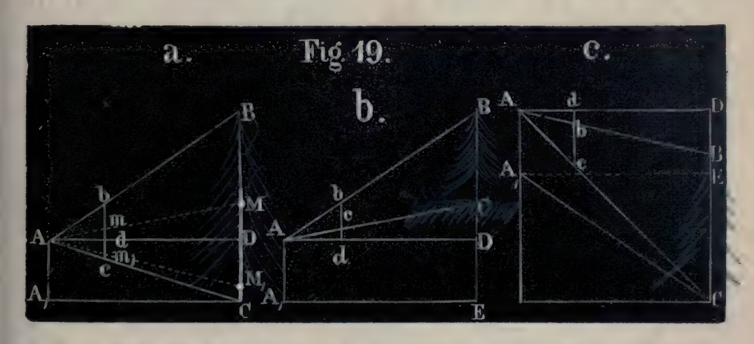
Erster Abschnitt.

Die Instrumente.

§. 24.

Die Instrumente zum Messen der Baumhöhen.

1. Theorie des geometrischen Höhenmessens. Die zahlreichen Baumhöhenmesser ergeben die Baumhöhen entweder auf geometrischem oder trigonometrischem Wege. Die Instrumente der ersten Klasse zerlegen sich dazu den Baum in zwei Theile BD und DC (Fig. 19abc.), wo der Punkt D von einer vom



Auge A des Beobachters ausgehenden Horizontallinie AD angegeben wird. Je nach der Neigung des Bodens wird dieser Punkt entweder zwischen Spitze und Fußpunkt (Fig. 19a.), oder unter den Fußpunkt (Fig. 19b.), oder über die Spitze (Fig. 19c.) des Baumes zu liegen kommen. Bildet man sich nun in jedem dieser Fälle mittels geeigneter Vorrichtungen auf dem Höhenmesser durch Visiren nach der Spitze und dem Fußpunkte des Baumes die Dreiecke Abd und Adc ähnlich den Dreiecken ABD und ADC, und mißt man außerdem die hori=

zontale Entfernung AD des Beobachters von der Axe des Baumes, so hat man in diesen Dreiecken

$$BD : bd = AD : Ad$$
$$DC : dc = AD : Ad$$

und daraus

$$BD = \frac{bd}{Ad} \cdot AD,$$

$$DC = \frac{dc}{Ad} \cdot AD.$$

Durch Addition dieser beiden Gleichungen erhält man (für Fig. 19a.) BD + DC oder

$$H = \frac{bd + dc}{Ad} AD \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 1^{a})$$

Aus Fig. 19b. folgt sogleich $H = BD - DC$ oder

$$H = \frac{bd - dc}{Ad} AD \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 1^{b})$$

und Fig. 19c. endlich ergiebt $H = DC - BD$ oder

$$H = \frac{dc - bd}{Ad} AD \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 1^{c})$$

Die Größen bd, dc und Ad werden unmittelbar in derselben Maßeinheit auf dem Höhenmesser abgelesen, AD wird mit dem Bande oder einem der anderen in §. 7 beschriebenen Längenmesser in Metern gemessen, so daß die Baumhöhe auf diese Weise ebenfalls in Metern erhalten wird.

Die Länge AD kann auf folgende Weise mittelbar gefunden werden. Stellt man (Fig. 19a.) neben dem Stamme eine Latte CL von bekannter Länge senkrecht und so auf, daß die Entfernung der Stammaxe vom Beobachter derjenigen der Latte vom Beobachter gleich ist, und visirt dann nicht nur nach der Spitze und dem Fußpunkte des Baumes, sondern auch nach der Spitze und dem Fuße der Latte, welche beide dazu durch Marken M und M_1 kenntlich gemacht sein müssen, so wird man auf dem Höhenmesser außer den Abschnitten bd und dc noch die beiden anderen md und dm_1 erhalten, und die ähnlichen Dreiecke AMD, Amd und ADM_1, Adm_1 werden ergeben

$$MD : md = AD : Ad$$
$$DM_1 : dm_1 = AD : Ad$$

oder

$$MD = \frac{md}{Ad} \cdot AD$$

$$DM_1 = \frac{dm_1}{Ad} \cdot AD,$$

und durch Addition

$$MD + DM_1 = \frac{md + dm_1}{Ad} AD.$$

Setzt man $MD + DM_1$ oder den Abstand der Zielscheiben an der Latte gleich a, so wird

$$AD = \frac{Ad}{md + dm_1} a,$$

und wenn man diesen Werth in die Gleichung 1ᵃ) einführt,

$$H = \frac{bd + dc}{md + dm_1} a.$$

Für die in Fig. 19a. und 19b. dargestellten Fälle ergeben sich ohne Mühe ähnliche Gleichungen.

Sollte man in irgend einem Falle, der jedoch nur selten eintreten wird, nicht im Stande sein, die horizontale Entfernung vom Auge des Beobachters bis zur Axe des Baumes zu messen, sondern wäre bloß (Fig. 20) ein Theil dieser Entfernung $A_1 A_1'$ zugänglich, so hätte man die horizontale Projection $E E_1$ dieses Theiles zu messen, sie sei gleich e, sich in beiden Endpunkten A_1 und A_1' desselben aufzustellen und von beiden Standpunkten aus nach der Spitze B und dem Fußpunkte C des Baumes zu visiren. Nennt man x die Horizontalprojection E_1 C des unzugänglichen Stückes A_1' C, so hat man aus den Messungen vom Standpunkte A_1 aus

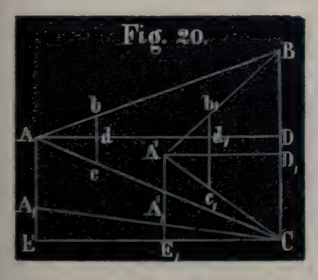


Fig. 20.

$$H = \frac{bd + dc}{Ad} (e + x),$$

dagegen aus den Messungen, welche in A_1' vorgenommen werden,

$$H = \frac{b_1 d_1 + d_1 c_1}{Ad_1} x.$$

Bestimmt man aus dieser zweiten Gleichung

$$x = \frac{Ad}{b_1 d_1 + d_1 c_1} H,$$

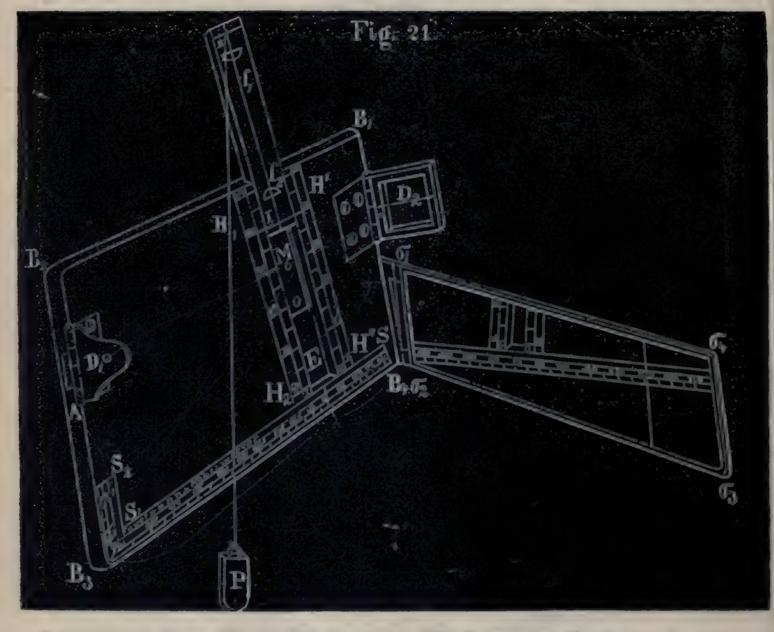
und setzt diesen Werth in der ersten ein, so wird

$$H = \frac{bd + dc}{Ad} \left(e + \frac{Ad_1}{b_1 d_1 + d_1 c_1} H\right),$$

und daraus

$$H = \frac{(bd + dc)(b_1 d_1 + d_1 c_1)}{Ad\,(b_1 d_1 + d_1 c_1) - Ad_1\,(bd + dc)}\; e.$$

2. Faustmann's Spiegelhypsometer. Der compendiöseste und zweckmäßigste Höhenmesser dieser Gattung, vielleicht der zweckmäßigste Baumhöhenmesser überhaupt, ist Faustmann's Spiegelhypsometer*). (Fig. 21.) Dasselbe besteht aus einem etwa 18 Cent. langen, 8 Cent. breiten und 0,6 Cent. dicken Brettchen $B_1 B_2 B_3 B_4$, an welchem nahezu parallel zum oberen und unteren Rande die Diopter D_1 und D_2 befestigt sind, wo D_1 das mit einem Visirloche versehene Oculardiopter, D_2 das



Objectivdiopter ist, welches zum Absehen ein horizontal eingespanntes Pferdehaar trägt. Beide Diopter sind durch Charniere beweglich und auf die Vorderseite des Brettchens niederzulegen.

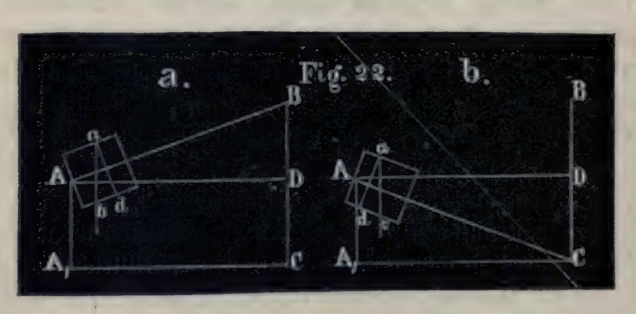
---

*) Allgem. Forst- u. Jagdz. 1856. S. 441. — Eine Anzahl anderer Baumhöhenmesser finden sich in den oben §. 2 angeführten Werken von Baur, Hartig, Ed. Heyer, Hoßfeld, König und Smalian beschrieben. Man vergleiche auch noch „Großbauer, Franz. Das Winkler'sche Taschen-Dendrometer neuester Construction in seiner Anwendung zur Baum- und Bestandesschätzung und zu anderen in der forstlichen Praxis vorkommenden Messungsarbeiten. Mit 63 in den Text eingedruckten Holzschnitten. Wien, 1864. Wilhelm Braumüller. 8.°

Parallel zur Visirlinie, d. h. zur Verbindungslinie des Ocularloches D_1 mit dem Objectivfaden D_2 ist eine auf Papier gezeichnete und mit Firniß überzogene Scala $S S_1$ auf dem Brettchen aufgeklebt. Der Nullpunkt derselben befindet sich im Durchschnittspunkte der Geraden $S S_1$ mit einer Geraden, welche senkrecht zur Visirlinie $D_1 D_2$ steht. Rechts von diesem Nullpunkte sind 40, links von demselben 100 einander gleiche Theile aufgetragen, sowie auch noch 20 solcher Theile auf einem rechtwinklig zu dieser Scala stehenden Scalenstücke $S_1 S_2$ aufgetragen sind. Die Ziffern dieser Scala sind, da sie nicht unmittelbar am Brettchen, sondern in einem Spiegel abgelesen werden, verkehrt geschrieben. Die Theilstriche der Scala $S S_1 S_2$ stehen nicht senkrecht zu den Geraden $S S_1$ und $S_1 S_2$, sondern laufen nach oben hin zusammmen. Sie sind nämlich so gezogen, daß sie verlängert in einem Punkte zusammentreffen, welcher in einer Geraden enthalten ist, die durch den Nullpunkt geht und auf der Visirlinie $D_1 D_2$ oder, was dasselbe ist, auf der Geraden $S S_1$ senkrecht steht. Schneidet man auf dieser Senkrechten eine Strecke ab, welche der Entfernung des Nullpunktes der Scala vom Theilstriche 100 gleich ist, so ist der Endpunkt derselben derjenige Punkt, nach welchem die Theilstriche der Scala $S S_1 S_2$, welche Faustmann die Höhenscala nennt, zusammenlaufen. Parallel mit dieser Geraden, so daß seine Mittellinie mit derselben zusammenfällt, ist in dem Brettchen eine Vertiefung E mit paralleltrapezischem Querschnitt, dessen breite Seite sich unten befindet, eingeschnitten. In dieser Vertiefung läßt sich ein Schieber $s_1 s_2$ bewegen, der, um sein Verwerfen und Quellen zu verhüten, in kochendem Leinöl gesotten ist. Außerdem befindet sich in dem Ausschnitte, in einer flachen Rinne eingelassen, eine federnde Messingplatte M, welche den Schieber $s_1 s_2$ gegen die schiefgestellten Seiten des Ausschnittes preßt. Parallel zu dem Schieber ist zu jeder Seite desselben eine Scala $H_1 H_2$ und $H' H''$ angebracht, von Faustmann aus später einzusehenden Gründen Distanzscala genannt, von welchen die rechtsliegende von 10 bis 60, die linksliegende von 60 bis 110 beziffert ist, so daß die mit 10 und 60 und mit 60 und 110 bezeichneten Theilstriche der beiden Scalen eine Gerade bilden. In dieselben beiden Geraden fallen zwei mit I und II bezeichnete Marken des Schiebers. Im Durchschnittspunkte der Marke II und der Mittellinie des Schiebers, welch' letztere im Nullpunkte der Scala $S S_1$ senkrecht auf $S S_1$ steht, ist an einem Seidenfaden ein Pendel P aufgehängt, das aus einem parallelepipedischen Bleistücke besteht und beim Nichtgebrauche in einem unter dem Oculardiopter D_1 befindlichen Ausschnitte A aufbewahrt werden kann. Am hinteren Rande $B_1 B_4$ des Brett-

chens ist ein an einem Charnier beweglicher, in Messingblech gefaßter Spiegel $\sigma_1\ \sigma_2\ \sigma_3\ \sigma_4$ befestigt, dem durch das Charnier jede beliebige Stellung gegeben werden kann und der sich auf das Brettchen legen und mit diesem in einem Pappfutterale verbergen läßt.

Die Theorie des Instrumentes ist sehr einfach und folgende. Stellt sich der Beobachter, welcher die Baumhöhe BC (Fig. 22 a b.) messen will, in dem Punkte A_1 auf und visirt durch die Diopter nach B, so schneidet der Pendelfaden auf der Scala vom Nullpunkte d aus ein Stück db ab. Von dieser Strecke, der Mittel-



linie ad des Schiebers und dem Pendelfaden ab wird aber ein rechtwinkeliges Dreieck abd gebildet, welches dem rechtwinkeligen Dreiecke ABD der Natur — über den Punkt D siehe oben unter 1. — ähnlich ist, weil ad auf AB, ab auf AD senkrecht steht. Ebenso wird, wenn man nach dem Fußpunkte C des Baumes visirt, von dem Pendelfaden auf der Scala das Stück dc abgeschnitten. Dann ist, weil ac senkrecht auf AD, ad senkrecht auf AC, das rechtwinkelige Dreieck acd ähnlich dem rechtwinkeligen Dreieck ACD. Aus diesen vier Dreiecken folgen aber die Proportionen

$$BD : bd = AD : ad$$
$$DC : dc = AD : ad,$$

mithin

$$BC = \frac{bd}{ad} AD,$$

$$DC = \frac{dc}{ad} AD,$$

und durch Addition und weil BC + DC gleich der Baumhöhe H,

$$H = \frac{bd + dc}{ad} AD.$$

In dieser Gleichung sind bd und dc die auf der Höhenscala abgeschnittenen Maßzahlen, ad die in der gleichen Maßeinheit aus-

gedrückte Entfernung des Pendelaufhängungspunktes vom Nullpunkte der Höhenscala, welche auf der Distanzscala gemessen wird (von der Marke I links, oder, wenn man den Schieber verkehrt einschiebt, durch die Marke II rechts). Der Quotient $\frac{bd + dc}{ad}$ ist dann noch mit der Maßzahl der horizontalen Entfernung AD zu multipliciren, um die Baumhöhe in der Maßeinheit der letzteren zu erhalten.

Die Gleichung

$$H = \frac{bd + dc}{ad} \cdot AD$$

läßt sich aber noch nach zwei Seiten hin vereinfachen. Stellt man nämlich die Marke I auf den Theilstrich 100 der Distanzscala, so wird ad oder die Entfernung des Pendelaufhängungspunktes vom Nullpunkte der Höhenscala gleich 100 Theilen dieser letzteren, die obige Gleichung geht dann über in

$$H = \frac{bd + dc}{100} AD.$$

Andererseits kann man aber auch die Multiplication mit AD ersparen. Mißt man nämlich die horizontale Entfernung AD vor den Höhenvisuren, und macht die Gerade ad in dem Maßstabe der Distanzscala gleich AD, so wird natürlich

$$ad : AD = 1 : n$$

mithin auch

$$H = (bd + dc)\, n,$$

d. h. die Baumhöhe wird bei dieser Stellung des Schiebers unmittelbar aus den auf der Höhenscala abgelesenen Zahlen erhalten.

Der Gebrauch des Instrumentes ergiebt sich aus dem Gesagten leicht. Man stellt sich nämlich in einer Entfernung von dem zu messenden Baume auf, welche wo möglich der gesuchten Baumlänge nahe gleich ist, weil in diesem Falle die Fehler beim Visiren den geringsten Fehler in der Höhe erzeugen*), und läßt

---

*) Elementar läßt sich dieser Satz wie folgt nachweisen. Nennt man in dem bei C rechtwinkeligen Dreiecke ABC die Seite BC = a, AC = b, Winkel BAC = φ, so ist

Fig. 23.

$$\frac{a}{b} = \tan \varphi.$$

Aendert sich nun b um die kleine Größe Δb, φ um die kleine Größe $\Delta \varphi$, so wird sich auch a um Δa ändern, so daß man hat

$$\frac{a + \Delta a}{b + \Delta b} = \tan (\varphi + \Delta \varphi).$$

die horizontale Entfernung des Aufstellungspunktes von der Axe des Baumes messen. Sodann kann man auf zweierlei Weise verfahren. Entweder nämlich stellt man die Marke I auf den Theilstrich 100 der Distanzscala, visirt durch die aufgerichteten

---

Zieht man von dieser Gleichung $\frac{a}{b} = \tan\varphi$ ab, so wird

$$\frac{a+\triangle a}{b+\triangle b} - \frac{a}{b} = \tan(\varphi + \triangle\varphi) - \tan\varphi,$$

und wenn man die Tangente der Winkelsumme $\varphi + \triangle\varphi$ auflöst,

$$\frac{a+\triangle a}{b+\triangle b} - \frac{a}{b} = \frac{\tan\varphi + \tan\triangle\varphi}{1 - \tan\varphi \cdot \tan\triangle\varphi} - \tan\varphi,$$

oder, da wegen der Kleinheit von $\triangle\varphi$ für $\tan\triangle\varphi$ gesetzt werden kann $\triangle\varphi$,

$$\frac{a+\triangle a}{b+\triangle b} - \frac{a}{b} = \frac{\tan\varphi + \triangle\varphi}{1 - \triangle\varphi \cdot \tan\varphi} - \tan\varphi.$$

Nach einer leichten Rechnung wird daraus

$$\frac{b\triangle a - a\triangle b}{b(b+\triangle b)} = \frac{\triangle\varphi(1+\tan^2\varphi)}{1-\triangle\varphi\tan\varphi}.$$

Multiplicirt man die Nenner weg und vernachlässigt alle Glieder, in welchen das Product der kleinen Größen $\triangle a\,\triangle\varphi$ und $\triangle b\,\triangle\varphi$ vorkommt, so erhält man

$$b\triangle a = a\triangle b + b^2\triangle\varphi(1+\tan^3\varphi)$$

oder

$$\triangle a = \frac{a}{b}\triangle b + b\triangle\varphi(1+\tan^2\varphi).$$

Damit also der Fehler in der Höhe oder $\triangle a$ ein Minimum werde, muß

$$\frac{a}{b}\triangle b + b\triangle\varphi(1+\tan^2\varphi)$$

ein Minimum werden. Der kleinste Werth, welchen dieser Ausdruck annehmen kann, ist aber offenbar Null; setzt man daher

$$\frac{a}{b}\triangle b + b\triangle\varphi(1+\tan^2\varphi) = 0,$$

und im ersten Gliede für $\frac{a}{b}$ das gleichwerthige $\tan\varphi$, so wird

$$\triangle b\tan\varphi + b\triangle\varphi(1+\tan^2\varphi) = 0,$$

und endlich

$$\frac{\triangle b}{\triangle\varphi} = -b\frac{1+\tan^2\varphi}{\tan\varphi}.$$

Da die rechte Seite dieser Gleichung auch gleich $-b\frac{1}{\sin\varphi\cos\varphi}$ ist, so erhält man dieselbe, wenn man mit 2 multiplicirt und dividirt, gleich $-2b\frac{1}{2\sin\varphi\cos\varphi}$ oder gleich $-2b\frac{1}{\sin 2\varphi}$, so daß

$$\frac{\triangle b}{\triangle\varphi} = -2b\frac{1}{\sin 2\varphi}.$$

Der Quotient $\frac{\triangle b}{\triangle\varphi}$ aber erreicht seinen kleinsten Werth $-2b$, wenn $\frac{1}{\sin 2\varphi} = 1$, oder wenn $\sin 2\varphi = 1$; dies findet statt für $2\varphi = 90^0$, oder für $\varphi = 45^0$, d. h. wenn das Dreieck ABC ein gleichschenkeliges rechtwinkeliges, womit die obige Behauptung bewiesen ist.

Diopter sowohl nach der Spitze als nach dem Fußpunkte des Baumes, liest die Lage des Pendelfadens bei beiden Visuren im Spiegel ab, wodurch man die Größen bd und dc erhält, dividirt deren Summe durch 100 (ad), multiplicirt den Quotienten mit der Maßzahl der horizontalen Entfernung, und erhält in dem Produkte die gesuchte Baumhöhe in der Maßeinheit der Standlinie. Oder man stellt bei Standlinien von 10 bis 60 Maßeinheiten (Metern) die Marke II, bei Entfernungen von 60 bis 110 Maßeinheiten (Metern) die Marke I auf der Distanzscala so ein, daß die Angabe der Scala der Maßzahl der horizontalen Entfernung gleich wird, und erhält dann unmittelbar in der Summe der Spiegelablesungen die Baumhöhe in der Maßeinheit der Standlinie.

Hätte man, um zu beiden Fällen ein Beispiel zu geben, die horizontale Entfernung gleich 63 Meter gefunden, und, nachdem man die Marke I auf 100 gestellt, die Ablesungen an der Höhenscala im Spiegel gleich 41 rechts und 12,5 links vom Nullpunkte erhalten, so hätte man als Baumhöhe

$$\frac{41 + 12{,}5}{100} 63 = 33{,}7 \text{ Meter.}$$

Wäre dagegen die Marke I auf den (zu schätzenden) Theilstrich 63 der Distanzscala eingestellt, und im Spiegel rechts vom Nullpunkte die Ablesung gleich 25,7 und links gleich 8 erhalten worden, so würde sich die Baumhöhe unmittelbar zu

$$25{,}7 + 8 = 33{,}7 \text{ Meter}$$

ergeben.

Vor dem Gebrauche ist das Instrument darauf zu prüfen, ob die Visirlinie, d. h. die Verbindung des Ocularloches mit dem Objectivfaden, parallel läuft zur Höhenscala, und ob die Mittellinie des Schiebers senkrecht auf dieser Scala steht und durch deren Nullpunkt geht. Beide Prüfungen sind mit Zirkel und Lineal leicht auszuführen. Das Nichtvorhandensein der ersten Forderung kann durch Verrücken eines der Diopter, das Nichtvorhandensein der zweiten durch seitliche Verschiebung des Pendelaufhängungspunktes in der Marke II verbessert werden.

Fehler in den Höhen können bei diesem Instrumente aus einer ungenauen Ablesung, aus fehlerhaftem Visiren und aus ungenauem Messen der Standlinien hervorgehen. Von groben Fehlern abgesehen, wird die erste Fehlerquelle wegen der Dicke des Pendelfadens etwa auf den vierten Theil eines Theiles der Höhenscala gesetzt werden können. Fehlerhafte Visuren sind, da ein Blick zum Ablesen genügt, kaum möglich, ebenso werden Fehler in den Standlinien immer vermieden werden können.

Sind daher die Ablesungen gleich α_1 und α_2 Theilen der Höhenscala, so können dieselben nach dem Obigen gleich $\alpha_1 \pm \frac{1}{4}$ und gleich $\alpha_2 \pm \frac{1}{4}$ erhalten werden, so daß im ungünstigsten Falle

$$H_1 = \frac{\alpha_1 \pm \frac{1}{4} + \alpha_2 \pm \frac{1}{4}}{100} AD,$$

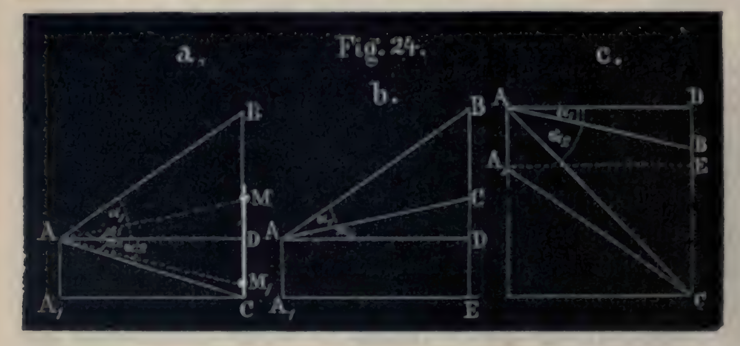
$$= \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{100} AD \pm \frac{1}{200} AD$$

wird. Der größte zu fürchtende Fehler würde somit gleich $\pm \frac{1}{200}$ AD sein oder ein halbes Procent der Standlinie betragen, für AD = 63 Meter also ± 0,315 Meter.*)

§. 25.

Fortsetzung.

1. Theorie des trigonometrischen Höhenmessens. Das trigonometrische Höhenmessen unterscheidet sich von dem geometrischen nur durch die Form der Rechnungsausdrücke. Bringt man nämlich auf dem Höhenmesser einen Kreisbogen an, bestimmt sich sodann an dem Baume wie in §. 24. 1. einen Punkt D und mißt durch geeignete Vorrichtungen, indem man sowohl nach der Spitze B, als auch nach dem Fußpunkte C des Baumes visirt, die Winkel BAD = α_1 und CAD = α_2



*) Das Spiegelhypsometer läßt sich mit großem Vortheil auch zu kleinen Nivellements, besonders zur Aufsuchung gleich hoch liegender Punkte, benutzen, worauf hier jedoch nicht weiter eingegangen werden kann. An dem Instrumentchen ist vielleicht nur auszusetzen, daß bei demselben der Wohlfeilheit allzusehr Rechnung getragen ist. Ein etwas stärkeres Brettchen, ein tiefer eingeschnittener Schieber, eine stärkere Fassung des Spiegels und elegantere Ausführung würden dasselbe gewiß noch empfehlenswerther machen, als es schon in seiner jetzigen Gestalt ist.

(Fig. 24 abc.), so erhält man nach den Lehren der Trigonometrie

$$BD = AD \tan \alpha_1,$$

$$DC = AD \tan \alpha_2,$$

mithin für die in Figur 24 abc. dargestellten Fälle

$$H_a = AD (\tan \alpha_1 + \tan \alpha_2),$$
$$H_b = AD (\tan \alpha_1 - \tan \alpha_2),$$
$$H_c = AD (\tan \alpha_2 - \tan \alpha_1).$$

Wollte man sich das Messen der Standlinie AD ersparen und deren Länge mit Hülfe einer Latte von bekannter Länge bestimmen, so hätte man, wenn die Visuren nach den Marken M und M_1 (Fig. 24 a.) die Winkel μ_1 und μ_2 ergeben,

$$MD = AD \tan \mu_1,$$
$$DM_1 = AD \tan \mu_2,$$

somit $MD + DM_1$ oder

$$a = AD (\tan \mu_1 + \tan \mu_2),$$

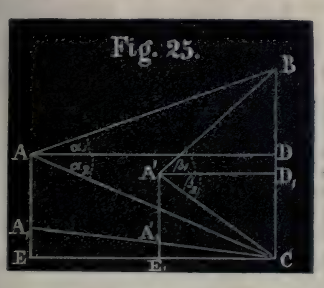
und

$$AD = \frac{a}{\tan \mu_1 + \tan \mu_2}.$$

Führt man diesen Werth z. B. in H_a ein, so wird

$$H_a = a \frac{\tan \alpha_1 + \tan \alpha_2}{\tan \mu_1 + \tan \mu_2}.$$

Für den Fall, daß die horizontale Entfernung AD zwischen Beobachtungspunkt und Baumaxe nicht in ihrer ganzen Ausdehnung zugänglich wäre, müßte man auch hier die Horizontalprojection $EE_1 = e$ (Fig. 25) des zugänglichen Theiles A_1 A_1' messen und in dem Punkte A_1 die Winkel α_1 und α_2, in dem Punkte A_1' die Winkel β_1 und β_2 beobachten. Dann hätte man aus den Dreiecken ABD und ACD, wenn $E_1 C = x$ gesetzt wird,



$$H = (e + x) (\tan \alpha_1 + \tan \alpha_2),$$

dagegen aus den Dreiecken $A'BD_1$ und $A'CD_1$

$$H = x (\tan \beta_1 + \tan \beta_2).$$

Diese letztere Gleichung ergiebt

$$x = \frac{H}{\tan \beta_1 + \tan \beta_2},$$

und wenn man diesen Werth in die erstere einsetzt, so erhält man

$$H = \left(e + \frac{H}{\tan \beta_1 + \tan \beta_2}\right) (\tan \alpha_1 + \tan \alpha_2)$$

oder

$$H = e \frac{\tan \alpha_1 + \tan \alpha_2}{(\tan \beta_1 + \tan \beta_2) - (\tan \alpha_1 + \tan \alpha_2)}.$$

2. Der Meßknecht von Preßler. Das einfachste Instrument dieser Classe von Baumhöhenmessern ist Preßlers Meßknecht*). Derselbe besteht aus einer kreuzweis durchschnittenen Papptafel, welche auf der Rückseite mit Leinwand überzogen ist und deshalb zu einer Ecke zusammengelegt werden kann. Das rechte untere Feld dieser Tafel, welches nach dem Zusammenlegen die Vorderseite des Instrumentes bildet, ist zur Höhenmessung mit einem 118 Grade umfassenden Kreisbogen versehen, in dessen Mittelpunkt an einem Seidenfaden ein Pendel angebracht ist, dessen Gewicht beim Nichtgebrauche in einem kleinen Täschchen an der Rückseite der Tafel aufbewahrt wird. Die Theilung des Kreises ist bis auf halbe Grade ausgeführt, doch lassen sich Achtelgrade noch schätzen. Neben der Gradtheilung sind unmittelbar die Tangenten der Winkel für den Radius 100 angegeben.

Beim Gebrauche visirt man längs der Oberseite der Ecke sowohl nach der Spitze als dem Fußpunkte des Baumes, und liest beide Male die von dem Pendel abgeschnittenen Höhenwinkel α_1 und α_2 oder auch deren Tangenten ab, dividirt die Summe oder Differenz der letzteren mit 100 und multiplicirt den Quotienten mit der Maßzahl der horizontalen Entfernung AD. Wäre diese Entfernung z. B. 63 Meter, $\alpha_1 = 22^1/_4{}^0$, $\alpha_2 = 7^1/_4{}^0$, so wäre $\tan \alpha_1 = 0{,}41$, $\tan \alpha_2 = 0{,}125$ und

$$H = 63\,(0{,}41 + 0{,}125) = 33{,}7 \text{ Meter.}$$

Vor dem Gebrauche hat man zu untersuchen, ob die durch den Aufhängungspunkt des Pendels und den Nullpunkt des Kreises gehende Gerade senkrecht steht auf dem Durchmesser des Kreises, welcher parallel zum oberen Rande gezogen ist. Die

---

*) Eine ausführliche Beschreibung und vollständige Gebrauchsanweisung dieses nützlichen Instrumentchens findet sich besonders in „Preßler, Das mathematische Aschenbrödel in Schule, Werkstatt, Wald und Feld oder der Ingenieur-Meßknecht in 4. Auflage. Leipzig. Baumgärtner's Buchhandlung. 1870. 8."

Prüfung kann leicht durch Anlegung eines rechten Winkels oder nach bekannten planimetrischen Methoden mit dem Zirkel vorgenommen werden. Die Abweichung wird durch eine Marke bezeichnet und an den gemessenen Winkeln in Rechnung gebracht.

Die Genauigkeit des Instrumentes läßt sich dadurch erhöhen, daß man dasselbe an einen Stock oder ein dreibeiniges Stativ schraubt, und in den oben angeführten Durchmesser des Höhenkreises oder in eine Gerade, parallel zu demselben, zwei Visirstifte oder noch besser zwei Diopter einsteckt. Die Visirlinie oder die Verbindung des Ocularloches mit dem Objectivfaden muß gleichfalls senkrecht auf der Geraden stehen, welche durch den Nullpunkt und Pendelaufhängungspunkt geht. Das Zutreffen dieser Bedingung und die Abweichung des von den genannten Linien gebildeten Winkels von einem Rechten oder den Indexfehler*) bestimmt man auf folgende Weise. Man stellt das an einem Stock oder Stativ befestigte Instrument in dem Endpunkte A einer Geraden AB auf, in dem Punkte B dagegen eine Nivellirlatte, bringt das Pendel über dem Nullpunkte zum Einspielen und läßt nun an der Latte die Zielscheibe so lange verschieben, bis ihre Mitte von dem Objectivfaden getroffen wird. Diese Lattenhöhe sei l_1, die Höhe des Oculardiopters in A aber i_1, der Höhenunterschied beider Punkte wird dann $l_1 - i_1$. Bringt man nun die Latte nach A, das Instrument aber nach B, und wiederholt das eben ausgeführte Nivellement, so erhält man die Lattenhöhe l_2 und die Instrumentenhöhe i_2, und daraus den Höhenunterschied der beiden Punkte zu $i_2 - l_2$. Ist das Instrument fehlerfrei, so muß

$$l_1 - i_1 = i_2 - l_2$$

sein; ist es aber fehlerhaft, so wird man bei beiden Aufstellungen die Lattenhöhe um eine Größe y, die sowohl positiv als negativ sein kann, falsch erhalten, oder man wird haben

$$(l_1 + y) - i_1 = i_2 - (l_2 + y),$$

und daraus

$$y = \frac{1}{2}(i_1 + i_2) - \frac{1}{2}(l_1 + l_2).$$

Um diese Größe wird die Zielscheibe der Latte verschoben, das Diopter darauf gerichtet, und der Spielpunkt des Pendels auf der Gradtheilnng bemerkt. Die Abweichung desselben vom Nullpunkt wird dann beim Winkelmessen in Rechnung gebracht.

---

*) Gewöhnlich nennt man denselben Collimationsfehler, doch bezeichnet die Geodäsie mit diesem Namen meistens die Abweichung des von der horizontalen Drehaxe des Fernrohres und der optischen Axe des letzteren gebildeten Winkels von 90°.

Ohne Stativ wird man die Winkel höchstens bis auf $\frac{1}{4}$ Grad genau messen können, wenn ein Gehülfe die Ablesungen macht, mit Stativ dagegen bis auf $\frac{1}{8}$ Grad*).

Ueber die mit dem Meßknechte zu erreichende Genauigkeit liegen von Brennecke**) einige Untersuchungen vor. Derselbe erhielt bei etwas bewegter Luft mit freier Hand einen Fehler von 0,88 bis 1,46 Meter, bei Anwendung eines Stativstabes und mit Visirstiften einen solchen von 0,15 bis 0,58 Meter. Bei ruhiger Luft und mit Stativstock und Visirstiften verringerte sich

---

*) Setzen wir voraus, daß in der Messung der Standlinie und beim Visiren keine groben Fehler vorgekommen sind, so hat man, wenn man den durch die Winkelfehler $\triangle \alpha_1$ und $\triangle \alpha_2$ entstehenden Fehler in der Höhe $\triangle H$ nennt, allgemein

$$H + \triangle H = AD\,[\tan(\alpha_1 \pm \triangle \alpha_1) + \tan(\alpha_2 \pm \triangle \alpha_2)] =$$
$$AD\left[\frac{\tan\alpha_1 \pm \triangle\alpha_1}{1 \mp \triangle\alpha_1 \tan\alpha_1} + \frac{\tan\alpha_2 \pm \triangle\alpha_2}{1 \mp \triangle\alpha_2 \tan\alpha_2}\right],$$

oder, wenn man links H, rechts das gleichwerthige AD $[\tan\alpha_1 + \tan\alpha_2]$ abzieht, und alle Glieder, in welchen das Product $\triangle\alpha_1\, \triangle\alpha_2$ erscheint, vernachlässigt, nach leichter Rechnung

$$\triangle H = AD\,\frac{\pm\triangle\alpha_1(1+\tan^2\alpha_1) \pm \triangle\alpha_2(1+\tan^2\alpha_2)}{1 \mp \triangle\alpha_1\tan\alpha_1 \mp \triangle\alpha_2\tan\alpha_2},$$

wobei vorausgesetzt wird, daß α_1 und α_2 den Werth von 45^0 nicht überschreiten.

Wäre beispielsweise $\alpha_1 = 45^0$, $\alpha_2 = 0$, so ginge, wegen $\tan 45^0 = 1$, diese Gleichung für positive $\triangle\alpha_1$ über in

$$\triangle H = AD\,\frac{2\triangle\alpha_1}{1 - \triangle\alpha_1},$$

für negative $\triangle\alpha_1$ dagegen in

$$\triangle H = AD\,\frac{2\triangle\alpha_1}{1 + \triangle\alpha_1}.$$

Für $\triangle\alpha_1 = +\frac{1}{4}^0$ hat man noch

$$\triangle H = AD\,\frac{0{,}00873}{0{,}99564} = 0{,}0088\ AD,$$

für $\triangle\alpha_1 = -\frac{1}{4}^0$ dagegen

$$\triangle H = AD\,\frac{0{,}00873}{1{,}00436} = 0{,}0087\ AD.$$

Für AD = 63 Meter, $\alpha_1 = 22\frac{1}{4}^0$, $\alpha_2 = 7\frac{1}{4}^0$, würde man, bei einem Fehler von $+\frac{1}{4}^0$ in jedem der beiden Winkel, einen Höhenfehler von 0,6 Meter; bei einem Winkelfehler von $+\frac{1}{8}^0$ einen Höhenfehler von 0,4 Meter erhalten.

**) Krit. Blätt. 46. B. 2. H. S. 180.

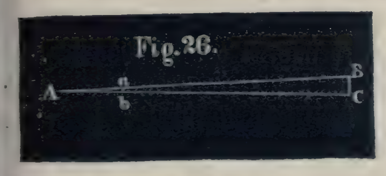
der Fehler auf 0,15 bis 0,29 Meter. Uebrigens fielen die Fehler sowohl in positiver als negativer Richtung in gleicher Größe.

§. 26.

Die Instrumente zum mittelbaren Messen der Durchmesser.

1. Die Instrumente zum Messen der Durchmesser stehender Bäume beruhen im Allgemeinen darauf, daß sie aus der Größe eines kleinen, auf ihnen unmittelbar gemessenen Bogens oder einer kleinen Geraden, und aus der Entfernung des Instrumentes vom Baume durch Rechnung auf die Baumdurchmesser schließen. Sie erfordern dazu Visirvorrichtungen und getheilte Maßstäbe. Die ersteren können entweder in einfachen Diopteren (Haardioptern, Schraubenspitzen rc.) oder in Fernröhren mit Fadenkreuz bestehen.

Ist (Fig. 26) die Entfernung $Aa = Ab$ des Oculardiopters vom Objectivfaden gleich ε, die Dicke des Objectivfadens ab gleich ω, und die Entfernung $AB = AC$ des Baumes vom Oculare gleich e, so kann die aus der Dicke des Diopterfadens im Baumdurchmesser entstehende Unsicherheit $BC = \varphi$ gefunden werden aus der Proportion



$$\varphi : \omega = e : \varepsilon,$$

welche

$$\varphi = \frac{e}{\varepsilon}\,\omega$$

ergiebt.

Wäre z. B. $e = 20$ Meter, $\varepsilon = 20$ Cent, die Dicke des Objectivfadens $= 0{,}2$ Millimeter, und würde die Unsicherheit ω im Einstellen selbst nur gleich der halben Dicke des Objectivfadens, also gleich 0,1 Millimeter angenommen, so würde die Unsicherheit in der Größe des Baumdurchmessers oder

$$\varphi = \frac{20}{0{,}20}\,0{,}0001 = 1 \text{ Cent}$$

sein. Da dieser Fehler in beiden Endpunkten des Durchmessers in gleicher Größe und in gleichem Sinne auftreten kann, so könnte in diesem Falle ein Durchmesserfehler von 2 Cent entstehen. Ein solcher würde aber, wenn die wahre Größe des Durchmessers D, wie wir oben (§. 6) gesehen haben, einen Fehler von $\frac{2}{D}\,200$ Procent in der Fläche hervorbringen.

Zu dem eben betrachteten Fehler, welcher aus der Unsicherheit des Einstellens des Diopterfadens entspringt, gesellt sich noch die Unsicherheit der Ablesung am Maßstabe. Beträgt diese ω_1, so hat man, wenn der Einfluß derselben auf den Durchmesser gleich φ_1 gesetzt wird,

$$\varphi_1 : \omega_1 = e : \varepsilon$$

und

$$\varphi_1 = \frac{e}{\varepsilon}\,\omega_1.$$

Wollte man z. B. den Durchmesser auf 1 Millimeter genau messen, so dürfte man jederseits nur einen Fehler von 0,5 Millimeter begehen, man hätte daher $\varphi = 0{,}0005$ und, wenn wieder $e = 20$ Meter, $\varepsilon = 20$ Cent,

$$0{,}0005 = \frac{20}{0{,}20}\,\omega_1,$$

und daraus

$$\omega_1 = \frac{0{,}0005 \,.\, 0{,}20}{20} = 0{,}005 \text{ Millimeter},$$

d. h. es müßte der Maßstab die Theilung bis auf 0,005 Millimeter abzulesen gestatten. Wollte man sich zur Bestimmung der Durchmesser eines Theodoliten von 10 Cent Radius bedienen, so würde, da hier $\varepsilon = 0{,}10$ Meter, $\omega_1 = 0{,}0025$ Millimeter; der Nonius müßte also den Kreis bis auf 0,0025 Millimeter theilen. Um diese Größe in Bogenmaß α überzuführen, hat man die Gleichung

$$\alpha^0 : 360^0 = 0{,}0025 : 2.100.\pi,$$

oder, wenn man α in Secunden ausdrückt,

$$\alpha = 206265'' \,.\, \frac{0{,}0025}{100} = 5{,}15662 \text{ Secunden}.$$

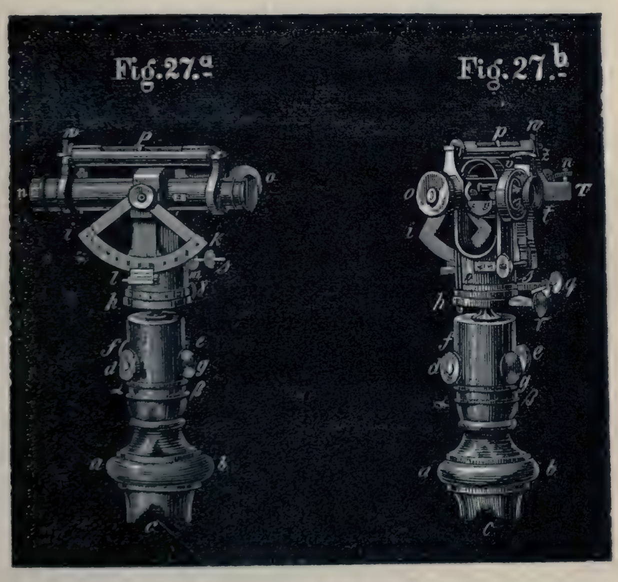
Der Theodolit müßte also mindestens 5 Secunden Nonienangabe besitzen.

Aus diesen Betrachtungen geht mit Sicherheit hervor, daß zur mittelbaren Messung von Baumstärken Fernrohrinstrumente nöthig, mit einfachen Dioptern versehene Instrumente aber durchaus unzureichend sind, weil schon die Dicke der Diopterfäden einen ganz unzulässigen Durchmesserfehler herbeiführen kann. Diese Ungenauigkeit der Diopter wird aber noch erhöht durch die wegen der Farbe der Rinde meistens wenig scharfe Begrenzung der Durchmesserendpunkte und durch die Unregelmäßigkeiten der Rinde, welche wohl nur selten mit dem unbewaffneten Auge genau genug erkannt werden können.

Da, um die aus der Ungenauigkeit der Ablesung hervor-

gehenden Fehler auf das kleinste Maß zurückführen zu können, ein sehr fein getheilter Maßstab (Kreisrand) vorausgesetzt werden muß, so wird man, damit das Instrument keine für den Gebrauch unbequeme Größe erhält, zur Messung der kleinsten Theile des Maßstabes nicht Nonien, sondern die Mikrometerschraube benutzen müssen. Diese hat bis jetzt nur Breymann zu diesem Zwecke an forstlichen Instrumenten angewendet; wir wollen uns deshalb auch auf die Beschreibung des von dem Genannten construirten forstlichen Universalinstrumentes beschränken, alle mit einfachen Diopten versehene Dendrometer*) aber außer Acht lassen.

2. Das forstliche Universalinstrument von Breymann**). (Fig. 27 ab. Ansicht desselben in 1/5 der natürlichen Größe.)



Der unterste auf der Figur sichtbare Theil abc bildet den Kopf des dreibeinigen Statives (Wiener Stativ), auf welchen

---

*) Hierher gehört z. B. das Winkler'sche Taschendendrometer. Vergl. Großbauer a. a. O.

**) Da uns nur ein Exemplar der älteren Construction (Breymann, Tafeln für Forstingenieure. S. 1 u. f.) dieses Instrumentes zu Gebote stand, so haben wir die Beschreibung und Abbildung der neueren Construction den Mittheilungen Breymann's, zum Theil wörtlich, entnommen (Beschreibung und Gebrauchsanweisung eines neuen forstlichen Meßwerkzeuges. Allgem. Forst- u. Jagdz. 1868. S. 201.), die Beschreibung jedoch in mehreren wesentlichen, von Breymann ungenügend behandelten Punkten nach unserem Instrumente vervollständigt.

das Instrument an der Stelle $\alpha\beta$ aufgeschraubt wird. Die einander gegenüberstehenden Schrauben d, e, f, g wirken auf einen im Innern der cylindrischen Hülse befindlichen eisernen Würfel und dienen zur Vertikalstellung der Axe cp des Instrumentes, folglich auch zur Horizontalstellung des auf dieser Axe senkrecht stehenden Horizontalkreises hγ. Dieser zur Messung der Horizontalwinkel dienende Kreis gestattet vermittelst des daran angebrachten Nonius die Ablesung der Horizontalwinkel von Minute zu Minute. Oberhalb des Horizontalkreises hγ befindet sich der in vertikaler Lage angebrachte Kreisbogen ik, welcher zur Messung der Höhen- und Tiefenwinkel dient. Dieser Kreisbogen ist unmittelbar in Drittelgrade getheilt und gestattet durch den feststehenden Nonius lm die Ablesung der Höhen- und Tiefenwinkel bis zu 55 Graden von Minute zu Minute. Dabei ist die Einrichtung getroffen, diesen Nonius lm vermittelst der zu beiden Seiten desselben befindlichen, in der Figur 27 a. ersichtlichen Schräubchen etwas zu verschieben, wodurch es möglich wird den Nullpunkt des Nonius lm mit dem Nullpunkte des Höhenbogens ik in Uebereinstimmung zu bringen, wenn die Luftblase p der auf dem Fernrohre befindlichen Libelle wp einspielt, und dadurch den Indexfehler des Höhenbogens ganz zu beseitigen.

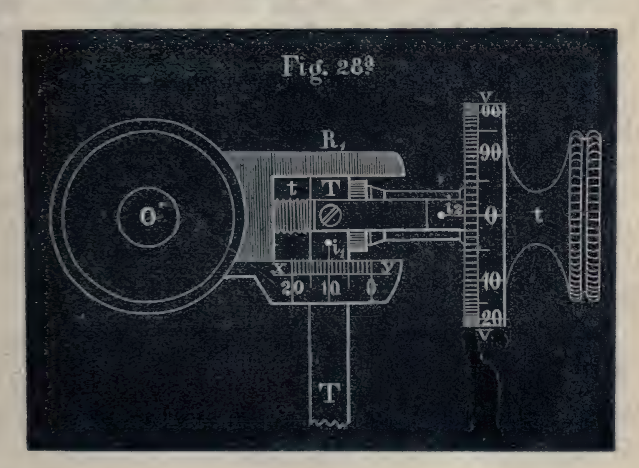
Unmittelbar über dem Höhenbogen ik ist das 13 Cent lange astronomische Fernrohr no angebracht, dessen Ocularröhre sich nach der Sehweite des Beobachters verschieben läßt. Damit das in der Ocularröhre befindliche Fadenkreuz dem Auge des Beobachters stets in genügender Schärfe und Deutlichkeit erscheine, ist die Hülse o des Ocularglases mit einem Schraubengewinde versehen und läßt sich dadurch nach Bedarf entweder in die Ocularröhre hinein-, oder auch herausschrauben.

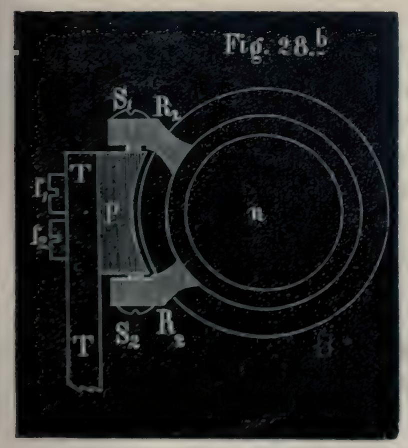
Auf dem Fernrohre no ist endlich die Röhrenlibelle wp aufgesetzt, welche zur Horizontalstellung des Kreises hγ und der optischen Axe no des Fernrohres dient, und es ist die Rectificationsschraube w zu dem Zwecke angebracht, um die Axe dieser Röhrenlibelle mit der optischen Axe des Fernrohres parallel stellen zu können. Das Instrument gestattet sowohl eine grobe als auch eine feine Horizontal- und Verticalbewegung. Wird die Bremsschraube r (Fig. 27 b.) geöffnet, so läßt sich der Cylinder hγ in horizontaler Richtung mit freier Hand beliebig drehen; wird aber diese Schraube angezogen, so gestattet nur noch die Mikrometerschraube q eine feine Bewegung des Instrumentes in horizontaler Richtung. Wird ebenso die Bremsschraube z der Vertikalbewegung geöffnet, so läßt sich der Höhenbogen ik mit freier

Hand beliebig drehen; wird aber diese Schraube angezogen, so ist eine feine Vertikalbewegung blos mittelst der Mikrometerschraube s, welche auf den Hebelarm wirkt, möglich.

Die Mikrometerschraube t (Figur 27 b.) dient endlich zum Distanzenmessen und vermittelt eine feine Seitenbewegung des Fernrohres, zu deren Messung die geradlinige in 20 Theile getheilte Scala xy dient.

Um dem Fernrohre diese Seitenbewegung ertheilen zu können, ist dasselbe an einem mit der Axe des Höhenbogens ik verbundenen Metallträger TT (Fig. 28 ab.) befestigt, und zwar so-





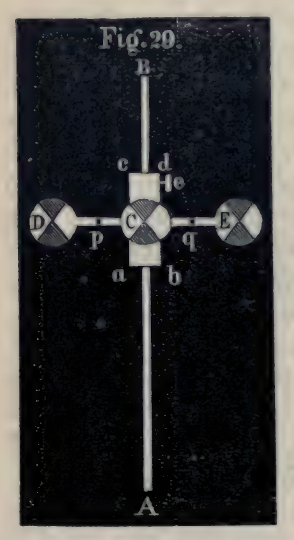
wohl in der Nähe seines Ocular- als seines Objectivendes. An beiden Orten umfassen Ringe das Fernrohr. Der Ring am Objectivende läuft (Fig. 28 b.) in zwei Arme R_2 R_2 aus, welche von den einander diametral gegenüberstehenden Schrauben S_1 S_2 durchbohrt werden. Die Spitzen dieser Schrauben stecken in einem durch die Schrauben s_1 s_2 mit dem Träger TT verbundenen Metallprisma P, so daß sich das Fernrohr um dieselben drehen kann.

Der Ring am Ocularende setzt sich (Fig. 28 a.) in einen prismatischen Arm R_1 fort, welcher in einem gleichgestalteten Aus-

schnitte auf dem Träger TT ruht. An der unteren Seite dieses Armes ist die Scala xy angebracht, deren Stellnng von der an dem Träger TT befestigten Indexplatte i_1 angegeben wird. Den Träger TT durchbohrt die Mikrometerschraube tt, deren Spitze in dem Arme R_1 steckt, und deren Bewegung eine Bewegung des Fernrohres um die Schraubenspitzen $S_1 S_2$ am Objectivende herbeiführt.

Rückt durch die Bewegung der Mikrometerschraube der Index i_1 auf der Scala xy um einen Theilstrich vor, so entspricht diese Vorrückung einer ganzen Umdrehuug der Mikrometerschraube. Um aber auch Theile eines ganzen Schraubenumganges messen zu können, ist die kreisförmige Trommel der Mikrometerschraube in hundert Theile getheilt, und es entspricht die vom Index i_2 (Fig. 28b.) angegebene Vorrückung dieser Trommel um einen Theilstrich dem hundertsten Theile einer ganzen Schraubenumdrehung. Da sich nun der Stand des Index i_2 an der Trommel v zwischen je zwei Theilstrichen noch nach Zehnteln eines solchen Intervalles schätzen läßt, so ist es auf diese Weise möglich, die seitliche Verrückung des Fernrohres bis zu einem Tausendstel einer ganzen Schraubenumdrehung zu messen.

Außer Gebrauch wird das Instrument von dem Stative an der Stelle $\alpha\beta$ abgeschraubt und in einem Kästchen von 18,5 Cent Länge und Breite und 13 Cent Höhe verpackt, welches sich an einem Riemen sehr bequem tragen läßt.



Einen weiteren Bestandtheil dieses Instrumentes bildet die in Fig. 29 abgebildete 3 Meter lange Latte AB, welche von A gegen B aufwärts in Meter und Centimeter eingetheilt ist. Diese Latte ist mit einem Arme DCE versehen, welcher sich vermittelst einer in seiner Mitte angebrachten Hülse abcd an der Latte AB in einer auf letzterer senkrechten Richtung verschieben, und durch die auf eine Stahlfeder drückende Klemmschraube e feststellen läßt.

An der mit einer Oeffnung versehenen Rückseite der Hülse abcd ist ein Centimeter vom Mittelpunkte C aus auf einer in die Hülse eingelassenen Messingplatte in 10 Millimeter getheilt, wodurch es möglich wird, den Abstand des Armes DCE vom Fußpunkte der Latte nicht

nur in Metern und Centimetern, sondern auch in Millimetern anzugeben.

An dem Arme sind drei runde Zieltafeln D, C und E angebracht, und es beträgt der Abstand der Mittelpunkte D, E der beiden äußeren Zieltafeln von einander bei unserem Instrumente 1,2644 Meter.

Das Instrument muß allen den Bedingungen entsprechen, welche bei Winkelmessern überhaupt erfüllt sein müssen. Es erscheint daher überflüssig dieselben alle aufzuzählen und deren Correctionen nachzuweisen, da die ersteren sowohl wie die letzteren in jedem Lehrbuche der Geodäsie bei der Beschreibung des Theodoliten nachgelesen werden können. Für die Zwecke der Baummessung muß das Instrument jedoch besonders zwei Forderungen genügen. Es muß nämlich die Libellenaxe parallel sein der optischen Axe des Fernrohres, und der Nullpunkt des Nonius mit dem Nullpunkte der Theilung zusammenfallen, wenn die Blase der Libelle einspielt.

Die erste Bedingung prüft man bekanntlich an Instrumenten, bei welchen die Libelle fest mit dem Fernrohre verbunden ist, dadurch, daß man eine Linie AB abmißt, deren Endpunkte mit Grundpfählen versieht, über dem einen (B) eine Nivellirlatte, über dem anderen (A) das Instrument aufstellt, die Blase der Libelle zum Einspielen bringt und dann den Stand der Latte l_1 abliest, und die Höhe i_1 des Oculares über dem Grundpfahle A mißt. Ueberträgt man dann die Latte nach A, das Instrument nach B, so wird sich als Lattenhöhe l_2 und als Instrumentenhöhe i_2 ergeben. Ist das Instrument fehlerhaft, so wird man die Lattenablesung beide Male um dieselbe Größe y falsch erhalten, d. h. man wird das erste Mal den Höhenunterschied von A und B nicht gleich $i_1 - l_1$, sondern gleich $i_1 - (l_1 + y)$, das zweite Mal den Höhenunterschied von B nach A nicht gleich $l_2 - i_2$, sondern gleich $(l_2 + y) - i_2$ finden, oder man wird, da beide Größen einander gleich sein müssen,

$$i_1 - (l_1 + y) = (l_2 + y) - i_2$$

und daraus

$$y = \frac{1}{2}(i_1 + i_2) - \frac{1}{2}(l_1 + l_2)$$

haben, wo y den Fehler bezeichnet, welcher dadurch entsteht, daß die Libellenaxe mit der optischen Axe des Fernrohres nicht parallel läuft. Um diesen Fehler zu entfernen, ziehe man die Größe y von der Größe l_2 ab, richte das Fernrohr auf diesen Punkt der Theilung der Nivellirlatte und verbessere die Libelle durch die

Correctionsschraube w so lange, bis die Blase einspielt. Dieses Verfahren muß natürlich mehrmals wiederholt werden.

Ist die Libellenaxe der optischen Axe des Fernrohres parallel gemacht, so kann man sich von dem Zusammenfallen des Nullpunktes des Höhenbogens mit dem Nullpunkte des Nonius, oder von dem Nichtvorhandensein eines Inderfehlers leicht auf folgende Weise überzeugen. Man bringe den Nullpunkt des Höhenkreises mit dem Nullpunkt des Nonius zum Zusammenfallen, sodann das Fernrohr mit der berichtigten Libelle in die Richtung zweier Stellschrauben und durch letztere die Libelle zum Einspielen. Dreht man dann das Fernrohr sammt der Libelle um 180°, so muß, wenn kein Inderfehler vorhanden, die Libelle auch in dieser zweiten Lage einspielen. Weicht dagegen die Libelle nach der Drehung aus, so verbessert man den Ausschlag der Luftblase halb an den Stellschrauben und halb an der Mikrometerschraube des Höhenbogens. Die kleine Abweichung des Nullpunktes des Nonius vom Nullpunkte des Höhenbogens, welcher nach dieser Verstellung sich finden wird, läßt sich durch die Stellschräubchen, in deren Spitzen der Nonius sich bewegt, beseitigen. Indem man das eine dieser Schräubchen zurück-, das andere vorwärts dreht, bewegt sich auch der Nonius in gleicher Richtung. Man kann also dadurch den Nullpunkt des Nonius so an den Nullpunkt des Höhenbogens bringen, daß beide zusammenfallen.

§. 27.

Fortsetzung.

Für die Zwecke der Holzmeßkunst sind mit diesem Instrumente folgende Aufgaben zu lösen.

1. Um einen Höhen- oder Tiefenwinkel zu messen, stellt man das berichtigte Instrument im Endpunkte A der Standlinie AB auf, bringt den Nullpunkt des Höhenkreises mit dem Nullpunkte des Nonius zum Zusammenfallen und stellt nun mit Hülfe der Stellschrauben d, e, f, g (Fig. 27 ab.) das Instrument horizontal. Sodann bringt man durch Drehen der Mikrometerschraube t den Inderstrich i_2 an den Theilstrich 10 der Scala xy, (in dieser Stellung ist die optische Axe des Fernrohres senkrecht zu seiner Drehaxe), löst die Bremsschraube des Höhenkreises und führt den letzteren nach dem äußersten Punkte der zu messenden Höhe, schließt sodann die Bremsschraube und bewirkt die genaue Einstellung durch die Mikrometerschraube. Die Ablesung des Nonius am Höhenbogen ergiebt dann unmittelbar den gesuchten Höhen- oder Tiefenwinkel.

2. Um die horizontale Entfernung zweier Punkte zu bestimmen, stelle man das Instrument in einem dieser Punkte horizontal auf, bringe den Indexstrich i_2 auf den Theilstrich 10 der Scala xy und drehe den geöffneten Horizontalkreis so lange, bis der Horizontal- und Verticalfaden des Fernrohres den Mittelpunkt der mittleren Zieltafel C der Latte, welche in dem Punkte B aufgestellt ist, treffen. Natürlich muß man dazu den Arm DCE der Latte so lange verschieben, bis derselbe von der horizontalen Visirlinie getroffen wird. Führt man nun durch die Mikrometerschraube t den Verticalfaden des Fernrohres sowohl auf die linke als die rechte Zieltafel und liest die Angaben der Scala xy und der Trommel v ab, so ist, wenn wir den Abstand der beiden äußeren Zieltafeln e, die gesuchte horizontale Entfernung E, die Ablesung an der Scala und Trommel links mit l, rechts mit r bezeichnen,

$$E = \frac{ek}{l - r},$$

wo k eine vom Instrumente abhängige Constante bezeichnet*).

Könnte wegen zu großer Neigung des Bodens die horizontale Visur den Arm DCE nicht treffen, so müßte man denselben beliebig feststellen und noch den Winkel messen, welchen die Visur nach demselben mit der Horizontalen bildet. Wäre derselbe gleich φ, so hätte man

---

*) Man hat nämlich, wenn γ_1 und γ_2 die Winkel bezeichnen, welche von den nach den Mittelpunkten der Tafeln D und C, E und C gehenden Visirlinien gebildet werden,

$$\frac{1}{2} e = E \tan \gamma_1,$$

$$\frac{1}{2} e = E \tan \gamma_2,$$

somit

$$e = E (\tan \gamma_1 + \tan \gamma_2).$$

Wegen der Kleinheit der Winkel γ_1 und γ_2 ist aber auch

$$\tan \gamma_1 = \frac{l - 10}{k}$$

$$\tan \gamma_2 = \frac{10 - r}{k}$$

oder

$$\tan \gamma_1 + \tan \gamma_2 = \frac{l - r}{k},$$

wo k die schon erwähnte Constante bedeutet. Setzt man den letzteren Ausdruck in den für e gefundenen Werth ein, so wird

$$e = E \,.\, \frac{l - r}{k}$$

und daraus wie oben

$$E = \frac{ek}{l - r}.$$

$$E = \frac{ek}{l - r} \cos \varphi.$$

Um die Constante k zu ermitteln, messe man auf ebenem Boden die Entfernung zweier Punkte genau ab, stelle über dem einen das Instrument, über dem anderen die Latte auf, und bestimme l und r wie vorher. Dann ist

$$k = \frac{E\,(l - r)}{e},$$

in welcher Gleichung sämmtliche Größen bekannt sind. Wir fanden z. B. bei unserem Instrument $e = 1{,}2644$, $E = 19{,}7$ Meter, $l - r = 18{,}948$, mithin

$$k = \frac{19{,}7\,.\,18{,}948}{1{,}2644} = 295{,}2.$$

Es wird daher

$$E = \frac{295{,}2\,.\,1{,}2644}{l - r} = \frac{373{,}28}{l - r}.$$

Den Quotienten $\frac{373{,}28}{l - r}$ berechnet man sich zweckmäßig für alle möglichen Werthe von $l - r$ und trägt die Resultate der Rechnung in eine Tafel, um in jedem einzelnen Falle der Rechnung überhoben zu sein.

3. Um eine Baumhöhe zu messen, stelle man das Instrument in einem Punkte A horizontal auf, lasse die Latte an den Baum stellen und den Arm derselben verschieben, bis er vom Horizontalfaden gedeckt wird. Dann bestimmt man auf die eben gelehrte Weise die horizontale Entfernung E des Punktes A vom Aufstellungspunkte der Latte und vermehrt dieselbe um die Größe des halben Baumdurchmessers D, wie er sich in der Höhe des Armes der Latte findet. Mißt man nun noch den Winkel α, welchen die horizontale Visirlinie mit der Visur nach der Spitze bildet und nennt a den Abstand des Armes vom Fußpunkte der Latte, so ist die Baumhöhe

$$H = (E + \frac{1}{2} D) \tan \alpha + a.$$

Könnte man den Standpunkt nicht so wählen, daß man die horizontale Entfernung unmittelbar erhielte, sondern müßte man nach dem Arme der Latte den Höhenwinkel φ messen, so wäre die horizontale Entfernung des Punktes A von der Baumaxe $\left(E + \frac{1}{2} D\right) \cos \varphi$, und die Baumhöhe

$$H = \left(E + \frac{1}{2} D\right) (\tan \alpha - \tan \varphi) \cos \varphi + a,$$

wo natürlich $\tan\alpha$ und $\tan\varphi$ je nach der Neigung des Bodens positiv oder negativ in Rechnung kommen müssen*).

4. Um mit dem Instrumente Baumdurchmesser zu messen, stelle man dasselbe wieder horizontal, bestimme auf bekannte Weise die horizontale Entfernung E des Aufstellungspunktes vom Baume, richte sodann das Fernrohr nach dem zu messenden Durchmesser und lese den Höhenwinkel ψ ab, und führe endlich den Verticalfaden des Fernrohres durch Bewegung der Mikrometerschraube so weit nach links und rechts, bis er beide Male die Seiten des Baumes scharf berührt. Ist die Ablesung links λ, rechts ρ, so hat man, weil $\frac{E}{\cos\psi}$ die Entfernung des Beobachters von dem gesuchten Durchmesser, ähnlich wie oben

$$\frac{E}{\cos\psi} = \frac{Dk}{\lambda - \rho}$$

woraus der gesuchte Durchmesser

$$D = \frac{E(\lambda - \rho)}{k\cos\psi}.$$

Führt man für E seinen früher gefundenen Werth $\frac{ek}{l-r}$ ein, so wird

$$D = \frac{ek}{l-r} \cdot \frac{\lambda-\rho}{k\cos\psi} = \frac{\lambda-\rho}{l-r} \cdot \frac{e}{\cos\psi},$$

oder, wenn man

$$E = \frac{ek}{l-r}\cos\varphi$$

gefunden hätte,

$$D = \frac{\lambda-\rho}{l-r}\,\frac{\cos\varphi}{\cos\psi}\,e.$$

Wir haben, um zu prüfen, welche Genauigkeit in der Durchmessermessung sich mit dem Breymannschen Instrumente erreichen läßt, eine Reihe Untersuchungen angestellt, deren Ergebnisse, entgegen unserer sehr tiefgestellten Erwartung, beweisen, daß die Durchmesser stehender Bäume durch dieses Instrument mit sehr

*) Nach §. 25, 2. würde der Fehler in der Baumhöhe

$$\triangle H = (E + \frac{1}{2}D)\frac{\pm\triangle\alpha(1+\tan^2\alpha)}{1\mp\triangle\alpha\tan\alpha}$$

sein, oder, da das Instrument die Winkel bis auf 1 Minute abzulesen gestattet,

$$\triangle H = (E + \frac{1}{2}D)\frac{\pm 0{,}00029\,(1+\tan^2\alpha)}{1\mp 0{,}00029\tan\alpha}.$$

Für $\alpha = 45^\circ$ und ein positives $\triangle\alpha$ erhält dieser Ausdruck den Werth $0{,}00058\,(E + \frac{1}{2}D)$.

großer Schärfe bestimmt werden können*). Die Versuche wurden bei sehr ungünstiger Beleuchtung vorgenommen und erstreckten sich auf Fichten, Tannen und Kiefern. Einen Unterschied in der Genauigkeit ergaben diese drei Holzarten nicht, ebenso scheint die Größe des Durchmessers keinen Einfluß auf dieselbe zu haben. Die gefundenen Zahlen sind, nach der Größe des Fehlers geordnet, folgende:

Ordnungsnummer.	Holz-art.	Berechneter Durchmesser. Cent.	Gemessener Durchmesser. Cent.	Differenz beider Durchmesser. Cent.	Ordnungsnummer.	Holz-art.	Berechneter Durchmesser. Cent.	Gemessener Durchmesser. Cent.	Differenz beider Durchmesser. Cent.
1.	Kiefer	36,4	35,8	+ 0,6	26.	Fichte	18,0	18,2	− 0,2
2.	Tanne	20,0	19,4	+ 0,6	27.	"	6,5	6,7	− 0,2
3.	Fichte	40,5	40,0	+ 0,5	28.	Kiefer	31,3	31,6	− 0,3
4.	Kiefer	36,6	36,2	+ 0,4	29.	Fichte	26,6	26,9	− 0,3
5.	"	28,2	28,0	+ 0,2	30.	Kiefer	22,4	22,7	− 0,3
6.	Fichte	18,1	17,9	+ 0,2	31.	Fichte	22,3	22,6	− 0,3
7.	Kiefer	27,2	27,1	+ 0,1	32.	Kiefer	21,0	21,3	− 0,3
8.	Fichte	25,9	25,8	+ 0,1	33.	"	20,9	21,2	− 0,3
9	"	21,2	21,1	+ 0,1	34.	Fichte	17,9	18,2	− 0,3
10.	"	39,2	39,2	0,0	35.	"	16,9	17,2	− 0,3
11.	Kiefer	33,3	33,3	0,0	36.	"	15,8	16,1	− 0,3
12.	"	32,0	32,0	0,0	37.	Kiefer	33,3	33,7	− 0,4
13.	Fichte	29,7	29,7	0,0	38.	"	30,6	31,0	− 0,4
14.	Kiefer	24,9	24,9	0,0	39.	Fichte	23,1	23,5	− 0,4
15.	"	22,4	22,4	0,0	40.	"	23,1	23,5	− 0,4
16.	Fichte	20,4	20,4	0,0	41.	"	19,0	19,4	− 0,4
17.	"	20,3	20,3	0,0	42.	"	14,9	15,3	− 0,4
18.	Tanne	19,2	19,2	0,0	43.	"	39,1	39,6	− 0,5
19.	Fichte	26,3	26,4	− 0,1	44.	Kiefer	24,8	25,3	− 0,5
20.	Kiefer	23,0	23,1	− 0,1	45.	Fichte	24,8	25,3	− 0,5
21.	Fichte	13,2	13,3	− 0,1	46.	"	8,9	9,4	− 0,5
22.	"	25,8	26,0	− 0,2	47.	"	23,8	24,4	− 0,6
23.	"	24,4	24,6	− 0,2	48.	"	34,1	34,8	− 0,7
24.	Kiefer	21,0	21,2	− 0,2	49.	"	22,8	23,5	− 0,7
25.	Fichte	19,8	20,0	− 0,2	50.	"	11,2	11,9	− 0,7

*) Das Breymann'sche Instrument hat, abgesehen von der nicht sehr zweckmäßigen Einrichtung des Horizontalkreises, zwei Fehler. Einmal ist das Fernrohr etwas zu schwach: die Arbeit wird in Folge dessen sehr anstrengend und ermüdend; dann ist keine Vorrichtung vorhanden, um die Latte so stellen zu können, daß die Visirlinie nach der mittleren Scheibe des Querarmes senkrecht auf diesem Arme steht, wie doch die Theorie es verlangt. Der erste Fehler ist leicht zu vermeiden durch Anwendung eines stärker vergrößernden Fernrohres; der zweite kann sogleich dadurch verbessert werden, daß man an der Hülse a b c d des Armes senkrecht zu letzterem und unmittelbar neben der Latte A B eine kleine Röhre oder eine andere Visirvorrichtung anbringt. Wenn nun der Lattenführer, durch diese Röhre sehend, nach dem Instrumente visirt und die Latte so weit dreht, bis er die Objectivlinse des Fernrohres

Aus diesen Zahlen ergiebt sich, wenn man die Vorzeichen der Fehler nicht beachtet, im Durchschnitt ein Fehler von 0,30 Cent. Derselbe würde bei günstigeren äußeren Verhältnissen wahrscheinlich noch etwas kleiner ausgefallen sein.

Bei der Wahl des Aufstellungspunktes für das Instrument ist ganz besonders darauf zu sehen, daß der zu messende Baum nicht auf einem anderen nahestehenden mit gleichgefärbter Rinde projicirt erscheint, da man dann die Begrenzung der Durchmesser nicht oder nur schwierig zu erkennen vermag.

Breymann*) führt noch ein anderes mit jedem Fernrohrinstrumente zu bewirkendes Verfahren zum Messen von Durchmessern an. Dasselbe besteht darin, daß man den Arm DCE mit einer feinen Theilung und zwei beweglichen Marken p und q versieht, die Latte senkrecht am Baume aufstellt und die Endpunkte des zu messenden Durchmessers auf diesen Arm projicirt. Dies geschieht dadurch, daß man die Marken p und q so lange verschieben läßt, bis dieselben von dem Verticalfaden des Fernrohres getroffen werden, wenn derselbe auf den linken und rechten Endpunkt des Durchmessers eingestellt wird. Die Differenz der von den Marken bezeichneten Theilstriche muß dann unmittelbar den gesuchten Durchmesser ergeben.

Zweiter Abschnitt.

Die Methoden der Holzgehaltbestimmung stehender Bäume.

§. 28.

Die Ocularschätzung.

Dieses älteste, auch jetzt noch häufig angewendete Verfahren, den Cubicinhalt stehender Stämme zu bestimmen, ist nichts Anderes als eine sehr rohe Form der in den folgenden Paragraphen dargestellten Schätzung nach Formzahlen**), bei welcher man von

---

durch die Röhre erblickt, so wird die nach der mittleren Scheibe C gehende Visirlinie des Fernrohres sehr nahe senkrecht auf dem Arme DE stehen.

Uebrigens kann jeder kleine Theodolit ohne Mühe in dieses Universal-Instrument verwandelt werden, und wird dann dem Breymann'schen Instrumente vorzuziehen sein.

*) Allgem. Forst- u. Jagdz. 1868. S. 209.

**) Nachgewiesen von Kohli (Anleitung zur Abschätzung stehender Kiefern nach Massentafeln und nach dem Augenmaße. Mit 41 in den Text eingedruckten Holzschnitten. Berlin. Verlag von Julius Springer. 1861. 8., ein Werk, welches bezüglich der Ocularschätzung nachgelesen zu werden verdient).

jeder Messung absieht und die den Holzgehalt eines Stammes bedingenden Factoren, Stärke, Länge und Formzahl, allein nach dem Augenmaße bestimmt. Da bei diesem Verfahren nur die Geschicklichkeit des Einzelnen im richtigen Ansprechen der obigen Factoren in Frage kommt, so kann dasselbe zwar in einzelnen Fällen bei besonders eingeschulten Persönlichkeiten genaue und brauchbare Resultate liefern, niemals aber die Gewißheit geben, daß und wie weit die Resultate der Schätzung der Wahrheit nahe kommen oder von derselben abweichen.

Will man sich im Schätzen des Inhaltes stehender Bäume einige Uebung verschaffen, so muß man sich zuerst im Schätzen der Durchmesser und Längen der Bäume üben, seinem Gedächtnisse sodann den mittleren Gehalt eines Stammes von gegebener Länge und Stärke einprägen, und dieses Mittel nach der besonderen Form des Baumes vergrößern oder verkleinern. Dazu ist es nothwendig, daß man in den laufenden Holzschlägen den Inhalt vieler Stämme in der angegebenen Weise anspricht, denselben dann aber auch durch sectionsweise Messung bestimmt und mit der Schätzung vergleicht.

Die Genauigkeit der Ocularschätzung wird von verschiedenen Factoren beeinflußt, z. B. von der Helligkeit des Himmels, von der Neigung des Bodens gegen den Horizont, von der Holzart ꝛc. Man wird, wenn man z. B. Stämme ein und derselben Holzart längere Zeit geschätzt hat, beim Uebergange zu einer anderen Anfangs immer falsch schätzen, weil man die Formenverhältnisse der ersten Holzart auf die folgende überträgt.

Ausgedehnte vergleichende Untersuchungen über die Genauigkeit der Ocularschätzung hat Ihrig*) angestellt. Aus denselben geht hervor, daß bei geübten Taxatoren zwar das Ergebniß der Schätzung einer größeren Anzahl von Stämmen ein ziemlich befriedigendes ist, daß aber für den einzelnen Stamm meistens ganz unzuverlässige Resultate erhalten werden. So stiegen bei drei Versuchsreichen die Fehler der in jeder Reihe geschätzten Massen, auf — 10,2; + 11,4; — 11,7 Procent, während sie bei dem jedesmal besten Taxator nur + 1,9; — 1,5; — 0,6 Procent des wirklichen Inhaltes betrugen. In der Inhaltsschätzung einzelner Stämme wurden aber Fehler begangen, welche von der Wahrheit um 30 Procent abwichen.

---

*) Supplem. z. allgem. Forst- u. Jagdz. III. B. S. 66.

§. 29.

Die Berechnung des Holzgehaltes stehender Bäume nach Formzahlen.

1. Von der reinen Ocularschätzung ging man schon früh einen Schritt weiter, indem man den Durchmesser oder Umfang des Baumes in geringer Höhe über dem Boden maß, die Scheitelhöhe (Höhe des Baumes vom Boden bis zur Spitze) mit einem Höhenmesser bestimmte, und nun den Inhalt dadurch berechnete, daß man den Baumschaft als Kegel betrachtete und die für den Durchmesser und die Scheitelhöhe desselben gefundenen Maßzahlen in die Formel $V = \frac{\pi}{12} D^2 H$ einsetzte.

Da man aber bald zu der Einsicht gelangte, daß der Inhalt des Baumschaftes in weitaus den meisten Fällen größer sei als der Inhalt eines Kegels, der mit dem Schafte gleiche Grundstärke und gleiche Höhe hat, sowie daß die Messung des Durchmessers unmittelbar über dem Boden unstatthaft sei, so schlug man ein anderes Verfahren ein. Man maß nämlich den Durchmesser der Bäume in einer constanten, von dem Wurzelanlaufe nicht mehr berührten Höhe, (Brusthöhe, 1,3—1,5 Meter über dem Boden), und ermittelte dann nach der Fällung die Länge und den Inhalt der gemessenen Stämme. Sei dieser V. Weiter dachte man sich über dem Durchmesser in Brusthöhe eine Walze gebildet, welche mit dem Baume gleiche Höhe und den Inhalt C hat, und berechnete das Verhältniß des Schaftinhaltes zum Inhalte dieser Walze. Dieses Verhältniß oder den Quotienten $\frac{V}{C}$, welcher angiebt, den wievielten Theil der Walze des Brusthöhendurchmessers der Schaftinhalt beträgt, nannte man Reductions-, wohl auch Formzahl, weil man durch denselben die Form des Baumes ausgedrückt glaubte und bezeichnete ihn mit f. Man hatte somit

$$\frac{V}{C} = f$$

und daraus

$$V = Cf.$$

Dieser Gleichung zufolge konnte man nun auch den Inhalt eines Baumes dadurch finden, daß man den Brusthöhendurchmesser und die Länge des Baumes maß, die aus diesen beiden Maßen sich ergebende Walze (Scheitel- oder Idealwalze) berechnete und deren Inhalt mit der Formzahl f multiplicirte, welche bereits aus der Messung und Berechnung eines früher gefällten, gleich hohen und ähnlich geformten Baumes bekannt war.

Hätte man also den Durchmesser eines Baumes in Brusthöhe gleich 20 Cent, seine Höhe gleich 20 Meter, seinen Inhalt gleich 0,385832 Cubicmeter gefunden, so würde die Scheitelwalze desselben $\frac{\pi}{4} 0{,}20^2.20 = 0{,}0314159.20 = 0{,}628318$ Cubicmeter betragen, seine Formzahl also

$$\frac{0{,}385832}{0{,}628318} = 0{,}614$$

sein.

Umgekehrt würde darnach der Inhalt eines 30 Meter langen und 30 Cent starken Baumes, dem man die Formzahl 0,614 beilegt, zu

$$\frac{\pi}{4} . 0{,}30^2 . 30.0{,}614 = 1{,}302018 \text{ Cubicmeter}$$

gefunden werden.

Hätten nun alle Bäume, wenigstens diejenigen derselben Holzart, gleiche Formzahl, so wäre die Berechnung des Holzgehaltes stehender Stämme sehr einfach. Bei der Berechnung der Formzahlen einer größeren Anzahl von Stämmen fand man aber, daß die Formzahlen nicht allein nach der Holzart sehr verschieden waren, sondern daß bei jeder Holzart sich mehrere Classen (Vollholzigkeitsclassen) ausscheiden ließen, welche in den Formzahlen bedeutende Abweichungen zeigten, ja endlich, daß innerhalb derselben Vollholzigkeitsclasse eine von der Höhe bedingte Verschiedenheit der Formzahl, (und zwar mit zunehmender Höhe eine Abnahme derselben,) stattfinde.

2. Daß die auf die eben angegebene Weise ermittelten Formzahlen selbst bei gleichgeformten, aber in der Länge von einander abweichenden Stämmen nicht übereinstimmen können, läßt sich leicht zeigen, wenn man die im 2. Abschnitte des 1. Capitels betrachteten regelmäßigen Körper daraufhin einer Untersuchung unterwirft.

a) Mißt man den Durchmesser D_m des geradseitigen Kegels von der Höhe H in der constanten Höhe m, so ist, wenn noch der Durchmesser der Grundfläche gleich D gesetzt wird,

$$D : D_m = H : H - m,$$

und daraus

$$D = \frac{D_m H}{H - m}.$$

Führt man diesen Werth in die Inhaltsformel des Kegels ein, so wird

$$V = \frac{\pi}{12} D_m{}^2 \left(\frac{H}{H - m}\right)^2 H.$$

Der Inhalt der Scheitelwalze ist aber $\frac{\pi}{4} D_m{}^2 H$, mithin die Formzahl

$$f = \frac{\frac{\pi}{12} D_m{}^2 \left(\frac{H}{H-m}\right)^2 H}{\frac{\pi}{4} D_m{}^2 H} = \frac{1}{3} \left(\frac{H}{H-m}\right)^2,$$

oder auch

$$f = \frac{1}{3} \frac{1}{\left(1 - \frac{m}{H}\right)^2}.$$

Da der Werth des Quotienten $\frac{1}{\left(1 - \frac{m}{H}\right)^2}$ abhängig ist von der Größe H, und abnimmt, wenn H wächst, dagegen zunimmt, wenn H kleiner wird, so müssen auch die Formzahlen des geradseitigen Kegels mit der Länge abnehmen. Dieselben müssen überdies, da $1 - \frac{m}{H}$ immer kleiner als 1, $\frac{1}{\left(1 - \frac{m}{H}\right)^2}$ daher immer größer als 1 sein muß, größer sein als $\frac{1}{3}$ oder 0,333 ...

So findet man z. B. für m = 1,5, H = 10, 20, 30 ... Meter, auf diese Weise

$$f_{10} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{(1 - 0{,}15)^2} = 0{,}461,$$

$$f_{20} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{(1 - 0{,}075)^2} = 0{,}390,$$

$$f_{30} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{(1 - 0{,}05)^2} = 0{,}369,$$

$$\vdots$$

b) Für das Paraboloid würde sich, da

$$D^2 : D_m{}^2 = H : H - m,$$

$$D^2 = \frac{D_m{}^2 H}{H - m}$$

ergeben, und daraus

$$V = \frac{\pi}{8} D_m{}^2 \frac{H}{H - m} H,$$

und weil die Scheitelwalze gleich $\frac{\pi}{4} D_m{}^2 H$,

$$f = \frac{\frac{\pi}{8} D_m{}^2 \frac{H}{H-m} H}{\frac{\pi}{4} D_m{}^2 H} = \frac{1}{2} \frac{H}{H - m},$$

oder

$$f = \frac{1}{2} \frac{1}{1 - \frac{m}{H}}.$$

Durch Schlüsse, analog den unter a. gemachten findet sich, daß auch beim Paraboloide die Formzahlen mit der Höhe abnehmen und immer größer sein müssen als $\frac{1}{2}$ oder 0,5. Den obigen Höhen würden beim Paraboloide folgende Formzahlen entsprechen:

$$f_{10} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 - 0{,}15} = 0{,}588,$$

$$f_{20} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 - 0{,}075} = 0{,}541,$$

$$f_{30} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 - 0{,}05} = 0{,}526,$$

$$\vdots$$

c) Um auch noch die neiloidischen Stammformen in den Kreis unserer Betrachtungen zu ziehen, so hat man für diese wegen

$$D^2 : D_m{}^2 = H^3 : (H - m)^3,$$

$$D^2 = \frac{D_m{}^2 H^3}{(H - m)^3}$$

und

$$V = \frac{\pi}{16} D_m{}^2 \left(\frac{H}{H - m}\right)^3 H.$$

Daraus ergiebt sich die Formzahl

$$f = \frac{\frac{\pi}{16} D_m{}^2 \left(\frac{H}{H - m}\right)^3 H}{\frac{\pi}{4} D_m{}^2 H} = \frac{1}{4} \left(\frac{H}{H - m}\right)^3,$$

oder auch

$$f = \frac{1}{4} \frac{1}{1 - \left(\frac{m}{H}\right)^3}.$$

Es werden daher bei dieser Körperform die Formzahlen gleichfalls mit zunehmender Höhe sinken, doch kann durch dieses Sinken die Grenze $\frac{1}{4}$ oder 0,25 nicht überschritten werden. Behandelt man auch hier die Längen 10, 20, 30 ... Meter auf ihre Formzahlen, so hat man

$$f_{10} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{(1-0{,}15)^3} = 0{,}407,$$

$$f_{20} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{(1-0{,}075)^3} = 0{,}316,$$

$$f_{30} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{(1-0{,}05)^3} = 0{,}292,$$

$$\vdots$$

3. Um die nach der unter 1. gegebenen Vorschrift ermittelten Formzahlen für die Zwecke der Baumschätzung brauchbar zu machen, berechnet man für die verschiedenen Holzarten an nach Länge &c. möglichst abweichenden Stämmen die Formzahlen und stellt dieselben, nach den Längen fortschreitend, in mehrere Classen zusammen und erhält so die Schaftformzahlen oder Schaftreductionszahlen.

Natürlich kann man nicht allein das Schaftholz, sondern die ganze oberirdische Masse V_1 auf die eben angegebene Weise behandeln und wird dann in dem Quotienten $\frac{V_1}{C}$, wo C seine frühere Bedeutung beibehält, die Baumformzahl F erhalten, so daß

$$F = \frac{V_1}{C}.$$

Alles, was wir unter 2. über die Schaftformzahlen gesagt haben, gilt natürlich auch von den Baumformzahlen, nur müssen die letzteren, da die gesammte oberirdische Masse größer als die Schaftmasse, also $V_1 > V$ ist, während C seinen Werth nicht ändert, größer werden als die Schaftformzahlen.

Da die Form der Baumschäfte hauptsächlich von dem gedrängteren oder lichteren Stande, in welchem sie erwachsen sind, und von der durch diesen Stand bedingten Größe der Baumkrone abhängt, so hat man die Form- oder Vollholzigkeitsclassen nach diesen beiden Größen geregelt. König*), welcher schon im Jahre 1813 Baum- und Schaftformzahlen für unsere Waldbäume

---

*) Holztaxation, Taf. II. u. III. — Forsttafeln zur Ausmessung, Gehalts- und Werthschätzung aufbereiteter Hölzer, stehender Bäume und ganzer Waldbestände. Gotha, in Commission der Becker'schen Buchhandlung. 1842. 8. 5. Auflage von Dr. Carl Grebe. Gotha. Verlag von E. F. Thienemann. 1864. Taf. II.

König giebt in diesen Tafeln nicht die Quotienten $F = \frac{V_1}{C}$ und $f = \frac{V}{C}$, sondern die Producte HF und Hf, die von ihm als Form- oder Gehaltshöhe bezeichnet werden. Dann wird natürlich

$$V_1 = \frac{\pi}{4} D^2 \, (HF) \text{ und } V = \frac{\pi}{4} D^2 \, (Hf),$$

wo $\frac{\pi}{4} D^2$, d. h. die Kreisfläche des Brusthöhendurchmessers, aus einer Kreistafel zu entnehmen ist.

aufstellte, unterscheidet fünf Classen und charakterisirt dieselben wie folgt*).

1. Classe. In mehr gedrängtem, dürftigem Stande, schmächtig und spitzig.

2. Classe. In mäßigem Schlusse, mehr kräftig und stammhaft.

3. Classe. In räumlichem und lichterem Stande, schaft- und kronenvoll.

4. Classe. In freierem Stande, kürzer, breiter und dichter beastet.

5. Classe. In einzelnem Stande, niedrig und weit ausgebreitet. Die Nadelholzstämme stehen hier ausnahmsweise ohne alles Astholz; einschließlich desselben fallen sie der 4. Classe anheim; die Nadelzweige sind in keiner Classe mitbegriffen.

Der Vollständigkeit wegen mögen hier die König'schen Baumformzahlen (nach der Umrechnung aus den Formhöhen) mitgetheilt werden. Denselben wird jedoch, wie noch bemerkt sein mag, häufig der Vorwurf gemacht, daß sie auf einer zu kleinen Anzahl wirklich ausgeführter Messungen beruhten, und in Folge dessen wenig genau seien. Uebrigens leuchtet deren Fehlerhaftigkeit sofort ein, wenn man z. B. die in oben unter 2 ab. für die Formzahlen des geradseitigen Kegels und des Paraboloides entwickelten Formeln m = 1,5 und H = 3 Meter setzt. Dann wird

$$f_k = \frac{1}{3 \cdot 0{,}5^2} = 1{,}333\ldots$$

$$f_p = \frac{1}{2 \cdot 0{,}5} = 1,$$

während nach König selbst die höchsten Baumformzahlen, nämlich diejenigen der Eiche, für obige Werthe von m und H nicht über 0,891 steigen.

Höhe.	Eiche.					Buche und Hainbuche.				
	Baumformclasse.					Baumformclasse.				
Meter.	1.	2.	3.	4.	5.	1.	2.	3.	4.	5.
5,0	0,578	0,629	0,699	0,788	0,886	0,568	0,614	0,674	0,749	0,837
7,5	0,572	0,624	0,694	0,782	0,880	0,562	0,609	0,669	0,743	0,831
10,0	0,566	0,619	0,689	0,776	0,873	0,556	0,604	0,664	0,738	0,825
12,5	0,560	0,614	0,684	0,770	0,866	0,550	0,599	0,659	0,732	0,819
15,0	0,554	0,609	0,678	0,764	0,860	0,544	0,594	0,654	0,727	0,813
17,5	0,548	0,603	0,673	0,758	0,854	0,538	0,589	0,649	0,721	0,807
20,0	0,542	0,597	0,667	0,752	0,847	0,532	0,583	0,643	0,715	0,801
22,5	0,536	0,592	0,662	0,746	0,840	0,527	0,578	0,638	0,710	0,794
25,0	0,530	0,586	0,657	0,740	0,833	0,521	0,573	0,633	0,704	0,787
27,5	0,524	0,581	0,652	0,734	0,827	0,515	0,568	0,628	0,699	0,781
30,0	0,518	0,576	0,646	0,728	0,820	0,509	0,563	0,623	0,693	0,775
32,5	0,512	0,570	0,640	0,722	0,814	0,503	0,557	0,617	0,687	0,769
35,0	0,506	0,565	0,635	0,716	0,807	0,497	0,552	0,612	0,682	0,763
37,5	0,500	0,560	0,630	0,710	0,800	0,491	0,546	0,607	0,676	0,757

*) Forsttafeln. S. 77.

Höhe.	Ahorn, Esche, Ulme, Linde.					Erle, Aspe, Pappel, Weide.				
	Baumformclasse.					Baumformclasse.				
Meter.	1.	2.	3.	4.	5.	1.	2.	3.	4.	5.
5,0	0,558	0,600	0,650	0,710	0,788	0,548	0,584	0,626	0,675	0,743
7,5	0,552	0,595	0,645	0,705	0,782	0,542	0,579	0,621	0,670	0,737
10,0	0,547	0,590	0,640	0,700	0,777	0,537	0,574	0,616	0,665	0,732
12,5	0,541	0,585	0,635	0,695	0,771	0,531	0,570	0,611	0,660	0,726
15,0	0,535	0,580	0,630	0,690	0,765	0,526	0,565	0,606	0,655	0,721
17,5	0,529	0,575	0,625	0,685	0,759	0,521	0,560	0,601	0,650	0,715
20,0	0,523	0,569	0,619	0,679	0,753	0,515	0,555	0,595	0,645	0,709
22,5	0,518	0,564	0,614	0,674	0,748	0,509	0,550	0,590	0,640	0,703
25,0	0,512	0,559	0,609	0,669	0,742	0,503	0,545	0,585	0,635	0,697
27,5	0,506	0,554	0,604	0,664	0,736	0,498	0,541	0,580	0,631	0,692
30,0	0,500	0,549	0,599	0,659	0,730	0,492	0,536	0,575	0,626	0,687
32,5	0,494	0,544	0,594	0,654	0,724	0,486	0,531	0,570	0,621	0,681
35,0	0,489	0,539	0,589	0,649	0,719	0,481	0,526	0,565	0,616	0,675
37,5	0,483	0,534	0,584	0,644	0,713	0,475	0,521	0,560	0,611	0,669
	Birke.					Lärche und Kiefer.				
5,0	0,475	0,508	0,538	0,578	0,634	0,491	0,531	0,590	0,666	·
7,5	0,468	0,501	0,531	0,571	0,627	0,486	0,526	0,584	0,660	·
10,0	0,461	0,494	0,524	0,564	0,621	0,481	0,521	0,579	0,653	·
12,5	0,454	0,488	0,518	0,558	0,614	0,476	0,516	0,573	0,646	·
15,0	0,447	0,482	0,512	0,552	0,607	0,471	0,511	0,567	0,640	·
17,5	0,440	0,475	0,505	0,545	0,600	0,467	0,507	0,562	0,633	·
20,0	0,432	0,469	0,499	0,539	0,592	0,463	0,503	0,557	0,627	·
22,5	0,425	0,463	0,493	0,533	0,585	0,458	0,498	0,552	0,620	·
25,0	0,418	0,456	0,486	0,526	0,578	0,453	0,493	0,546	0,613	·
27,5	0,411	0,450	0,480	0,520	0,571	0,449	0,489	0,541	0,607	·
30,0	0,404	0,444	0,474	0,514	0,564	0,445	0,485	0,536	0,600	·
32,5	0,396	0,437	0,467	0,507	0,556	0,440	0,480	0,530	0,594	·
35,0	·	·	·	·	·	0,435	0,475	0,525	0,587	·
37,5	·	·	·	·	·	0,430	0,470	0,520	0,580	·
	Fichte und Tanne.									
5,0	0,557	0,597	0,646	0,706	·					
7,5	0,551	0,591	0,639	0,699	·					
10,0	0,544	0,584	0,632	0,692	·					
12,5	0,538	0,578	0,625	0,685	·					
15,0	0,532	0,572	0,618	0,678	·					
17,5	0,525	0,566	0,611	0,671	·					
20,0	0,519	0,560	0,605	0,665	·					
22,5	0,513	0,554	0,599	0,659	·					
25,0	0,507	0,547	0,592	0,652	·					
27,5	0,501	0,541	0,585	0,645	·					
30,0	0,494	0,534	0,578	0,638	·					
32,5	0,488	0,528	0,571	0,631	·					
35,0	0,482	0,522	0,565	0,625	·					
37,0	0,476	0,516	0,558	0,618	·					
40,0	0,470	0,510	0,551	0,611	·					
42,5	0,464	0,504	0,544	0,604	·					
45,0	0,457	0,497	0,537	0,597	·					
47,5	0,451	0,491	0,531	0,591	·					

Da der Raumersparniß wegen die Formzahlen nur in Abstufungen der Länge von 2,5 Metern angegeben sind, so muß für alle zwischenliegenden Höhen eine arithmetische Interpolation

der Formzahlen eintreten. Wäre z. B. der Inhalt einer 28,8 Meter hohen und in Brusthöhe 23,0 Cent starken Fichte zu bestimmen, welche der dritten Formclasse angehören mag, so wäre, da

die Formzahl von	30	Meter	= 0,578,
„ „ „	27,5	„	= 0,585,
die Differenz „	2,5	„	= 0,007,
„ „ „	1	„	= 0,0028,
„ „ „	1,3	„	= 0,00364,

demnach die Formzahl von 28,3 Meter gleich 0,585—0,004=0,581, mithin der Bauminhalt

$$\frac{\pi}{4} \cdot 0{,}230^2 \cdot 28{,}8 \cdot 0{,}581 = 0{,}041548 \cdot 28{,}8 \cdot 0{,}581 = 0{,}695214$$

Cubicmeter.

4. Die Formzahlen der einzelnen Autoren, z. B. die von König, Cotta, Hundeshagen ꝛc., stimmen wenig überein, besonders deshalb, weil sie den Messungspunkt der Grundstärke nicht in gleicher Höhe annehmen. König nimmt als Meßpunktshöhe die Brusthöhe an, eine allerdings sehr dehnsame Bezeichnung, desgleichen Hundeshagen; Cotta*) noch unbestimmter eine Höhe zwei bis drei Fuß über dem unteren Benutzungspunkte. Nun folgt aber aus den unter 2 abc. entwickelten Formeln

$$f_k = \frac{1}{3} \frac{1}{\left(1 - \frac{m}{H}\right)^2},$$

$$f_p = \frac{1}{2} \frac{1}{1 - \frac{m}{H}},$$

$$f_n = \frac{1}{4} \frac{1}{\left(1 - \frac{m}{H}\right)^3},$$

daß die Formzahlen um so größer werden müssen, je höher am Stamme der Durchmesser der Scheitelwalze gemessen, oder, was dasselbe ist, je größer m genommen wird, da mit wachsendem m die Differenz $1 - \frac{m}{H}$ verkleinert und der Quotient $\frac{1}{1 - \frac{m}{H}}$ vergrößert werden muß. So würde, um nur ein Beispiel zu

*) Hülfstabellen für Forstwirthe und Forsttaxatoren. Dresden 1821, in der Arnoldischen Buchhandlung. 8. S. 7. Cotta bezieht übrigens seine Formzahlen (Tab. III. u. IV. a. a. O.) nicht auf die Scheitelwalze, sondern auf einen Kegel, der den Durchmesser in dem angegebenen Punkte zur Grundstärke und die Höhe des Baumes oberhalb des Benutzungspunktes zur Höhe hat. Dieselben müssen daher noch durch 3 dividirt werden, um mit denjenigen der anderen Schriftsteller wenigstens einigermaßen vergleichbar zu werden.

geben, die Formzahl des Paraboloides für m = 1 Meter und $H = 10$ gleich $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-0,1} = \frac{1}{1,8}$ oder 0,556 sein, während sie, wie wir gesehen haben, für m = 1,5 Meter vielmehr 0,588 beträgt.

§. 30.

Fortsetzung.

1. Der Umstand, daß selbst gleichgestaltete Baumschäfte, welche nur in der Länge von einander abweichen, verschiedene Formzahlen besitzen, wenn man die letzteren auf die im vorigen Paragraphen dargelegte Weise berechnet, und daß dadurch für jede Holzart eine umfängliche, alle vorkommenden Längen umfassende Formzahltafel nöthig wird, ließ eine Verbesserung dieser Zahlen wünschenswerth erscheinen.

Diese Verbesserung machte der um die Holzmeßkunst hochverdiente Smalian*), welcher vorschlug, die Stämme immer in einer ihrer ganzen Länge proportionalen Höhe über dem Boden zu messen, und zwar bei $\frac{1}{20}$ der ganzen Länge.

Untersucht man für diese Voraussetzung die von uns betrachteten regelmäßigen Körper, so hat man, wenn der Durchmesser bei $\frac{1}{n}\left(\frac{1}{20}\right)$ der Länge mit D_n, derjenige der Grundfläche (Abhiebsfläche) mit D bezeichnet wird, beim geradseitigen Kegel

$$D : D_n = H : H - \frac{1}{n} H,$$

und daraus

$$D^2 = D_n^2 \left(\frac{H}{H - \frac{1}{n} H}\right)^2 = D_n^2 \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{n}\right)^2}.$$

Beim Paraboloide ist

$$D^2 : D_n^2 = H : H - \frac{1}{n} H,$$

somit

$$D^2 = D_n^2 \frac{H}{H - \frac{1}{n} H} = D_n^2 \frac{1}{1 - \frac{1}{n}};$$

endlich folgt für das Neiloid aus

$$D^2 : D_n^2 = H^3 : \left(H - \frac{1}{n} H\right)^3$$

noch

*) Holzmeßkunst. S. 65.

$$D^2 = D_n^2 \frac{H^3}{\left(H - \frac{1}{n} H\right)^3} = D_n^2 \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{n}\right)^3}.$$

Führt man diese Werthe von D^2 in die Inhaltsformeln der drei Körper ein, so erhält man

$$V_k = \frac{\pi}{12} D_n^2 H \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{n}\right)^2},$$

$$V_p = \frac{\pi}{8} D_n^2 H \frac{1}{1 - \frac{1}{n}},$$

$$V_n = \frac{\pi}{16} D_n^2 H \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{n}\right)^3}.$$

Dividirt man diese Volumina durch den Inhalt der Scheitelwalze $\frac{\pi}{4} D_n^2 H$, so erhält man der Reihe nach die Formzahlen

$$f_k = \frac{1}{3} \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{n}\right)^2},$$

$$f_p = \frac{1}{2} \frac{1}{1 - \frac{1}{n}},$$

$$f_n = \frac{1}{4} \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{n}\right)^3},$$

Setzt man hierin nach Smalian $n = 20$, so wird

$$f_k = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{20}{19}\right)^2 = 0{,}369,$$

$$f_p = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{20}{19}\right) = 0{,}526,$$

$$f_n = \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{20}{19}\right)^3 = 0{,}292.$$

Wie man sieht, entfällt bei dieser Rechnungsweise die Höhe gänzlich aus dem Quotienten $\frac{V}{C}$, so daß diese Formzahlen in der That nur von der besonderen Form des Körpers abhängig sind. Preßler, der nach Smalian die Theorie der Formzahlen besonders bearbeitet hat*), nennt deshalb die auf die eben angegebene Weise berechneten Formzahlen echte**), und unterscheidet die im vorigen Paragraphen betrachteten davon als unechte.

*) Tharand. forstl. Jahrb. 9. B. S. 16. u. a. O.

**) Supplem. zur allgem. Forst- u. Jagdz. II. B. S. 86.

Auf gleiche Weise wie für die Schaftmasse allein, kann man durch Zurechnung des Astholzes auch Formzahlen für die ganze oberirdische Masse des Baumes erhalten, so daß man auch hier zwischen Schaftformzahlen und Baumformzahlen zu unterscheiden hat. Letztere müssen natürlich, da die gesammte oberirdische Masse V_1 größer ist als die Schaftmasse V, größer sein als die ersteren. Bezeichnet man die Schaftformzahl mit f, die Baumformzahl mit F, so ist

$$f = \frac{V}{C}, \quad F = \frac{V_1}{C},$$

und

$$F - f = \frac{V_1 - V}{C}.$$

Da $V_1 - V$ die Astmasse ausdrückt, so wird, wenn man den Quotienten $\frac{V_1 - V}{C}$ mit φ (Astformzahl) bezeichnet,

$$F - f = \varphi,$$

oder die Differenz der Baumformzahl und Schaftformzahl ist gleich der Astformzahl.

Während die unechten Formzahlen, um praktisch brauchbar zu werden, nach den Höhen fortschreitend tabellarisch zusammengestellt werden müssen, wodurch man in jeder Vollholzigkeitsclasse so viele Formzahlen erhält, als Höhenabstufungen vorhanden sind, erfordern die echten Formzahlen für jede Vollholzigkeitsclasse nur eine einzige Zahl; doch geht dieser Vortheil, wie wir weiter unten sehen werden, zum Theil wieder verloren.

Zur Construction brauchbarer Tafeln der echten Formzahlen hat man von jeder Holzart zahlreiche Erhebungen an Bäumen zu machen, welche nach Länge, Stärke und Alter möglichst von einander abweichen, um besonders die Grenzen feststellen zu können, zwischen denen die Formzahlen einer jeden Holzart schwanken. Diese Grenzen bezeichnet Preßler als abholzig und sehr vollholzig und theilt den Raum zwischen denselben noch in drei Stufen, ziemlich abholzig, mittelholzig und vollholzig. Die Einschätzung dieser Classen, welche bei einiger Uebung nicht schwierig zu erlangen ist, wird noch besonders erleichtert durch das Verhältniß, in welchem dieselben zum Holzalter stehen. Nennt man nämlich normales Forstalter A dasjenige, bei welchem der Bestand den höchsten gemeinjährigen Durchschnittsertrag liefert*), so mögen Hölzer vom Alter $\frac{1}{4}$ A als Jung=

*) Bezeichnet M_a die Masse des Bestandes, in den Jahren 1, 2, 3, ... 10, ... 20, ..., bildet man sodann die Quotienteu $\frac{M_1}{1}, \frac{M_2}{2}, \frac{M_3}{3}, \ldots$

hölzer, vom Alter $\frac{1}{2}$ A als Mittelhölzer, vom Alter A als Althölzer, und vom Alter $1\frac{1}{2}$ A als Hochalthölzer bezeichnet werden. Dann gehören im Allgemeinen die Hölzer der 1. bis 2. Formclasse den Junghölzern, der 2. bis 3. Formclasse den Mittelhölzern, der 3. bis 4. Formclasse den Althölzern, der 4. bis 5. Formclasse den Hochalthölzern an.

Nachstehend mag Preßler's Tafel der echten Stammformzahlen (f) (I. Bd. 3. Abth. Taf. 16 A.) hier ihren Platz finden. In derselben bedeutet die der Stammformzahl (f) als Exponent beigesetzte Zahl die Astformzahl (φ); die Summe beider, oder f + φ ist dann nach dem oben Gesagten gleich der Baumformzahl (F). Der Strich über den Astformzahlen bedeutet „reichlich oder $\frac{1}{2}$."

Normales Jung- Mittel- Alt- Hochalt-Holz. Hölzer vom Alter	$\frac{1}{4}$ A.	$\frac{1}{2}$ A.	A.	$1\frac{1}{2}$ A.	
Formclasse oder	I. abholzig.	II. ziemlich abholzig.	III. mittelholzig.	IV. vollholzig.	V. sehr vollholzig.
Tanne . . .	42^{10}	bis 45^{9}	bis 48^{8}	bis 52^{7}	bis 56^{6}
Fichte . . .	41^{9}	43^{9}	46^{8}	49^{8}	53^{7}
Kiefer . . .	40^{12}	43^{10}	46^{8}	50^{7}	55^{6}
Lärche . . .	40^{9}	42^{9}	44^{8}	47^{7}	50^{6}
Buche . . .	40^{15}	44^{14}	47^{13}	51^{12}	55^{11}
Eiche . . .	40^{15}	43^{15}	46^{14}	50^{14}	53^{13}
Erle . . .	42^{11}	$45^{\overline{10}}$	48^{10}	52^{9}	55^{8}
Birke . . .	40^{9}	$42^{\overline{8}}$	44^{8}	$46^{\overline{7}}$	49^{7}

Ulme, Ahorn, Esche, Aspe, Weide: wahrscheinlich zwischen Erle und Birke.

$\frac{M_{10}}{10}, \ldots \frac{M_{20}}{20}, \ldots,$ und sucht in der Reihe dieser Quotienten den größten auf, so ist das diesem Quotienten zugehörige Alter das normale Forstalter A. Wäre z. B. die Bestandesmasse eines mit Fichten bestandenen Hectars bei

	50	60	70	80	90	100 Jahren
	250	320	390	450	520	570 Cubicmeter,
so wäre						
$\frac{M_a}{a}$	5,00	5,33	5,57	5,63	5,78	5,70 Cubicmeter,

mithin, da $\frac{518}{90} = 5{,}78$ der größte dieser Quotienten, das normale Forstalter 90 Jahre.

Hätte man z. B. bei einer Buche von 25,5 Meter Länge den Durchmesser bei $\frac{25,5}{20}$ = 1,28 Meter zu 30 Cent gefunden, und wäre dieselbe als angehendes Altholz anzusprechen (Formclasse III.), so wäre deren Schaftformzahl 0,47, deren Baumformzahl 0,47 + 0,13 = 0,60. Der Inhalt derselben würde daher sein

$$\frac{\pi}{4}\, 0{,}30^2 \cdot 25{,}5 \cdot 0{,}60 = 0{,}706858 \cdot 25{,}5 \cdot 0{,}60$$
$$= 10{,}81493 \text{ Cubicmeter.}$$

Als Schaftinhalt derselben erhielte man

$$0{,}706858 \cdot 25{,}5 \cdot 0{,}47 = 8{,}47169 \text{ Cubicmeter,}$$

als Inhalt der Astmasse

$$0{,}706858 \cdot 25{,}5 \cdot 0{,}13 = 2{,}34323 \text{ Cubicmeter.}$$

Vergleichende Untersuchungen über die Genauigkeit, welche beim Einschätzen der echten Formzahlen zu erreichen ist, liegen von Schaal*) vor. An 300 durch Einschätzung der Formzahl cubirten Stämmen fand er den Inhalt zu groß um 0,549 Procent. Die Schwankungen in den Einzelcubirungen lassen sich, da nicht alle Einzelfälle mitgetheilt sind, nicht genau angeben: in den vorliegenden gehen sie von − 16,0 bis + 24,6 Procent.

Wie schon oben §. 29. 3. erwähnt, kann man den Ausdruck V = G H f auch in der Form schreiben

$$V = G\,(H\,f),$$

und das Product H f als Formhöhe bezeichnen. Berechnet man nun dieses Product für die vorkommenden Formzahlen und Scheitelhöhen, so erhält man den Inhalt V unmittelbar aus den Walzentafeln, wenn man den Durchmesser bei $\frac{1}{20}$ der Scheitelhöhe als Durchmesser, und die aus H f folgende Höhe als Höhe der Walze ansieht.

2. Wird die Grundstärke in der von Smalian vorgeschlagenen und von Preßler adoptirten Weise bei $\frac{1}{20}$ der Scheitelhöhe gemessen, so kommt es vor, daß der Meßpunkt in eine für die Ausführung der Messung höchst unbequeme Höhe fällt. Beträgt z. B. die Baumhöhe 15 Meter, so würde die Höhe des Meßpunktes bei 0,75 Meter liegen; wäre dagegen die Baumhöhe gleich 40 Meter, so würde die Meßpunktshöhe gleich 2 Meter sein; beide Meßpunktshöhen wären aber gleich unbequem. Es

*) Supplem. z. allgem. Forst- u. Jagdz. V. B. S. 141.

ist deshalb schon von Klauprecht*) der Vorschlag gemacht worden, die Bäume nach der Länge in mehrere Classen zu theilen, und die eine Classe bei $\frac{1}{10}$, die andere bei $\frac{1}{20}$ der Länge zu messen, so daß der Meßpunkt immer eine zur Ausführung der Messung bequeme Lage erhielte.

Preßler hat der erwähnten Unbequemlichkeit auf eine andere Weise abzuhelfen gesucht. Er schreibt nämlich vor, man solle die Formzahl zwar nach seinen Tafeln einschätzen, die Grundstärke jedoch in constanter Höhe messen, und die Formzahl, Scheitelhöhe, Grundfläche oder Masse um einen gewissen Procentsatz, welcher von der Scheitelhöhe und Meßpunktshöhe abhängt, verbessern. Diese Correction wird bei Baumlängen, welche kleiner sind als 20 m, (wo m die Meßpunktshöhe,) positiv, bei solchen, welche größer sind als 20 m, negativ.

Wäre dieser Procentsatz p, so würden die um $\frac{1}{10}n$ Meter über oder unter $\frac{1}{20}$ der Länge liegenden Flächen, die wir mit G_o und G_u bezeichnen wollen, mit der Fläche bei $\frac{1}{20}$ der Höhe zusammenhängen durch die Gleichungen

$$G_{\frac{1}{20}H} = G_o + \frac{p\,n}{100} G_o$$

$$G_{\frac{1}{20}H} = G_u - \frac{p\,n}{100} G_o.$$

Da der Höhenunterschied von G_o und $G_{\frac{1}{20}H}$ gleich $m - \frac{1}{20}H$, und der zwischen $G_{\frac{1}{20}H}$ und G_u gleich $\frac{1}{20}H - m = -\left(m - \frac{1}{20}H\right)$ beträgt, so wird die an G_o anzubringende Correction

$$c_o = \left(m - \frac{1}{20}H\right)\frac{p}{100},$$

die G_u beizufügende dagegen

$$c_u = -\left(m - \frac{1}{20}H\right)\frac{p}{100},$$

allgemein also

*) Holzmeßkunst. 2. Auflage. S. 45. Es sind daselbst auch S. 47. Formzahlen für unsere Hauptholzarten mitgetheilt, wenn die Meßpunktshöhe gleich 1/10 der Baumlänge angenommen wird.

$$c = \pm \left(m - \frac{1}{20} H\right) \frac{p}{100}$$

sein, wo p die obige Bedeutung hat und durch Versuche zu ermitteln ist. Soll die Correction c nicht im Procentsatze, sondern z. B. in Metern der Scheitelhöhe angegeben werden, so ist

$$H c = \pm \left(m - \frac{1}{20} H\right) \frac{H p}{100}.$$

Nach den bereits früher von Preßler*) gemachten und neuerdings von uns**) vervollständigten Untersuchungen ist $p = 2$, (m und H in Decimetern ausgedrückt,) und damit

$$c = \pm \left(m - \frac{1}{20} H\right) 0{,}02.$$

Nach dieser Formel ist die umstehend eingeschaltete Correctionstafel berechnet,***) in welcher die Striche über den Zahlen „reichlich oder $\frac{1}{2}$“ bedeuten.

Der Gebrauch dieser Tafel ist nun einfach folgender. Hätte man die Scheitelhöhe eines Stammes (Buche) gleich 24,0 Meter, seinen Durchmesser bei 1,4 Meter gleich 25,5 Cent gefunden, und die echte Formzahl zu 0,47 geschätzt, so hätte man nach der Correctionstafel die Scheitelhöhe um + 4 Procent, d. h. um 24 · 0,04 = + 0,96 Meter zu verbessern, so daß dieselbe mit 24 + 0,96 oder 24,96 Meter in Rechnung zu bringen wäre. Der Stamminhalt würde dann gleich 0,706858 · 24,96 · 0,47 = 8,292292 Cubicmeter sein. Statt die Scheitelhöhe zu ändern, hätte man auch die Formzahl oder die Grundfläche um 4 Procent vergrößern können und hätte dann für die erste 0,4888, für die zweite 0,735132 erhalten, und damit den Cubicinhalt zu 0,706858 · 24,0 · 0,4888 oder zu 0,735132 · 24,0 · 0,47, beide Resultate übereinstimmend mit dem obigen.

---

*) Allgem. Forst- u. Jagdz. 1861. S. 408. — Gesetz der Stammbildung S. 130. Hier giebt Preßler die Gleichungen

$$G_{\frac{1}{20}H} = G_o + 0{,}06\ G_o,$$
$$G_{\frac{1}{20}H} = G_u - 0{,}06\ G_o,$$

wo G_o und G_u die 1 preuß. Fuß über und unter $\frac{1}{20}$ der Scheitelhöhe gelegenen Flächen bedeuten.

**) Anhang, Zus. 2.

***) I. B. 3. Abth. Taf. 16 B. — Diese Correctionstafel für Scheitelhöhen in Fußen findet sich im Forstl. Hülfsb. S. 63 u. a. a. O. — Eine solche Tafel zur unmittelbaren Correction der Scheitelhöhen in Fußen daselbst S. 64. — Die von Preßler zuerst gegebenen Zahlen (Supplem. zur allgem. Forst- u. Jagdz. II. B. S. 96.) erwiesen sich nach den Untersuchungen von R. Micklitz als zu klein.

Die echte Formzahl, Masse, Höhe oder Stammgrundfläche ist um folgende Procente ihrer Größe zu corrigiren, wenn

die Scheitelhöhe H	die Meßhöhe der Grundfläche über dem Boden 0,6m.	0,8m.	1,0m.	1,2m.	1,4m.	1,6m.
8m.	+ 4	+ 8	.	.	.	.
9	+ 3	+ 7	.	.	.	.
10	+ 2	+ 6	+ 10	.	.	.
11	+ 1	+ 5	+ 9	.	.	.
12	0	+ 4	+ 8	.	.	.
13	− 1	+ 3	+ 7	.	.	.
14	− 2	+ 2	+ 6	+ 10	.	.
15	$-\bar{3}$	+ 1	+ 5	+ 9	.	.
16	$-\bar{4}$	0	+ 4	+ 8	.	.
17	$-\bar{5}$	$-\bar{1}$	+ 3	+ 7	.	.
18	$-\bar{6}$	$-\bar{2}$	+ 2	+ 6	+10	.
19	$-\bar{7}$	$-\bar{3}$	+ 1	+ 5	+ 9	.
20	$-\bar{8}$	$-\bar{4}$	0	+ 4	+ 8	.
22	$-\bar{9}$	$-\bar{6}$	$-\bar{2}$	+ 2	+ 6	+10
24	$-\overline{10}$	$-\bar{8}$	$-\bar{4}$	0	+ 4	+ 8
26	.	$-\overline{10}$	$-\bar{6}$	$-\bar{2}$	+ 2	+ 6
28	.	.	$-\bar{8}$	$-\bar{4}$	0	+ 4
30	.	.	$-\overline{10}$	$-\bar{6}$	$-\bar{2}$	+ 2
32	.	.	.	$-\bar{8}$	$-\bar{4}$	0
34	.	.	.	$-\overline{10}$	$-\bar{6}$	$-\bar{2}$
36	.	.	.	$-\overline{12}$	$-\bar{8}$	$-\bar{4}$
38	.	.	.	.	$-\overline{10}$	$-\bar{6}$
40	.	.	.	.	.	$-\bar{8}$

Ueber die Genauigkeit der Resultate, welche durch Messung der Durchmesser und nachherige Correction der Formzahlen mit Hülfe des von Preßler gegebenen Hülfstäfelchens erlangt werden kann, läßt sich natürlich nur durch Untersuchungen entscheiden. Schaal*) fand, nachdem er in einem 80- bis 100jährigen Kiefern-

*) Allgem. Forst- u. Jagdz. 1866. S. 202.

bestande die Formzahl auf die angegebene Weise zu 0,51 gefunden, bei der Prüfung dieses Resultates an hundert gefällten Stämmen genau dieselbe Größe.

Die unechten Formzahlen sind ohne Zweifel als ein Fortschritt der Taxationswissenschaft zu bezeichnen, nur haftet denselben der Fehler an, ohne Zuhülfenahme einer ziemlich umfänglichen Tafel nicht eingeschätzt werden zu können. Dieser Fehler wird vermieden von den echten Formzahlen. Hat man durch Untersuchungen die örtliche Bedeutung der Formklassen ermittelt, so daß man beim Ansprechen derselben keine allzubedeutenden Fehlschätzungen begeht, so wird, da die Scheitelhöhe und die Grundstärke bei $\frac{1}{20}$ der Scheitelhöhe fast immer mit aller Schärfe gemessen werden können, der nach dieser Methode berechnete Cubicinhalt stehender Bäume keinen allzugroßen Abweichungen von der Wahrheit unterliegen und vielfach hinreichende Genauigkeit gewähren. Im Falle man gezwungen ist, die Grundstärke in constanter Höhe zu messen, wird die Anwendung des obigen Correctionstäfelchens, d. h. die Ueberführung der Preßler'schen echten Formzahlen in unechte, mindestens ebenso rasch zum Ziele führen als die unmittelbare Anwendung der unechten Formzahlen, die überdies von den einzelnen Autoren, wahrscheinlich in Folge verschiedener Meßpunktshöhen, äußerst abweichend angegeben werden. Trotzdem wird man die Berechnung des Holzgehaltes stehender Bäume selbst mit Benutzung echter Formzahlen nur dann vornehmen, wenn man genöthigt ist, diesen Gehalt mit dem möglich geringsten Zeitaufwande zu ermitteln, z. B. bei der Abgabe zahlreicher Berechtigungshölzer rc. In den Fällen jedoch, wo eine größere Genauigkeit des Resultates gefordert wird, müssen Cubirungsmethoden Platz greifen, welche keines ihrer Rechnungselemente einschätzen, sondern jedes derselben messen, z. B. die in den beiden folgenden Paragraphen dargestellten Cubirungsmethoden.

Wollte man die praktische Brauchbarkeit der echten Formzahlen ganz leugnen, so müßte man denselben doch eine wissenschaftliche Bedeutung zuerkennen, nämlich für die Charakteristik der Baumformen. Diese Bedeutung wird diesen Formzahlen auch so lange bleiben, als die Erzeugungscurven der Baumkörper als Parabeln oder als Linien von der Form $y^2 = p x^m$ betrachtet werden müssen, d. h. so lange Aenderungen in der Krümmung der Schaftcurve in der Gleichung der letzteren noch nicht ausgedrückt werden können.

§. 31.

Die Berechnung des Holzgehaltes stehender Stämme durch sectionsweise Cubirung.

Da die oben §. 27. mitgetheilten Untersuchungen über die Genauigkeit, welche mit dem Breymann'schen forstlichen Universalinstrumente bei der Messung der Durchmesser stehender Bäume zu erreichen ist, ein über Erwarten günstiges Resultat geliefert haben, so ist die Möglichkeit gegeben, auch den Inhalt stehender Bäume durch sectionsweise Cubirung finden zu können.

Bei dieser Art der Inhaltsberechnung wird man jedoch davon absehen müssen, den Sectionen gleiche Länge geben zu wollen, da man in diesem Falle die Winkel, auf welche der Nonius des Höhenkreises einzustellen wäre, vorher berechnen müßte. Man wird vielmehr das Fernrohr immer auf Durchmesser richten, welche durch Unebenheiten der Rinde, Astwülste rc., möglichst wenig entstellt sind, und auf früher gelehrte Weise deren Größe und Höhe über dem Boden oder Abhiebspunkte bestimmen.*)

---

*) Sollten aus irgend einem Grunde die Sectionen gleich lang gemacht werden, so müßte man die Höhenwinkel vorher berechnen. Zieht man dabei der Einfachheit wegen nur die Höhe vom Scheitel bis zu dem Punkt in Betracht, wo der Stamm von der horizontalen Visirlinie getroffen wird, dessen Höhe über dem Boden gleich m_1 sein mag, so ist die übrigbleibende Länge dieses Stückes $H - m_1$, wenn H die ganze Höhe, mithin die Länge jeder Section $\frac{1}{n}(H - m_1)$. Es hat dann die Mittenstärke der ersten Section eine Höhe über m_1 von $\frac{1}{2n}(H - m_1)$, die der zweiten eine solche von $\frac{3}{2n}(H - m_1)$, die der dritten von $\frac{5}{2n}(H - m_1)$ u. s. w. Ist nun noch E die horizontale Entfernung der Baumaxe vom Beobachter, so werden die gesuchten Höhenwinkel α_1, α_2, $\alpha_3 \ldots .$, welche von dem horizontalen Visirstrahle und den Visirstrahlen nach den Mitten der einzelnen Sectionen gebildet werden, gefunden aus den Gleichungen

$$\tan \alpha_1 = \frac{1}{2n} \cdot \frac{H - m_1}{E},$$
$$\tan \alpha_2 = \frac{3}{2n} \cdot \frac{H - m_1}{E},$$
$$\tan \alpha_3 = \frac{5}{2n} \cdot \frac{H - m_1}{E}.$$
$$\vdots$$

Wäre z. B. $H = 31{,}2$, $m_1 = 1{,}2$, $E = 60$ Meter und $n = 6$, so würde

$$\tan \alpha_1 = \frac{1}{2 \cdot 6} \cdot \frac{30}{60}, \quad \alpha_1 = 2^0\, 23',$$
$$\tan \alpha_2 = \frac{3}{2 \cdot 6} \cdot \frac{30}{60}, \quad \alpha_2 = 7^0\;\; 7',$$
$$\tan \alpha_3 = \frac{5}{2 \cdot 6} \cdot \frac{30}{60}, \quad \alpha_3 = 11^0\, 46',$$

Zweckmäßig wird man den untersten Durchmesser D_0 nicht unter 1,3 — 1,5 Meter (m) über dem Boden messen, und das Stück zwischen diesem Punkte und dem Abhiebspunkte oder dem Boden für sich bestimmen. Sind die Höhen der Durchmesser D_1, D_2, D_3 ... über dem Boden H_1, H_2, H_3 ...., so ist dann die Länge der

$$\begin{array}{lll} 1^{\text{sten}} \text{ Section} & H_1 - m & = h_1, \\ 2^{\text{ten}} \quad " & H_2 - H_1 & = h_2, \\ 3^{\text{ten}} \quad " & H_3 - H_2 & = h_3, \\ \quad \vdots & & \end{array}$$

und das Volumen des Baumes bis zum Meßpunkte

$$V = \frac{\pi}{8}\left[(D_0{}^2 + D_1{}^2)\,h_1 + (D_1{}^2 + D_2{}^2)\,h_2 + (D_2{}^2 + D_3{}^2)\,h_3 + \ldots\right]$$

oder

$$V = \frac{1}{2}\left[(G_0 + G_1)\,h_1 + (G_1 + G_2)\,h_2 + (G_2 + G_3)\,h_3 + \ldots\right].$$

Als Rechnungsbeispiel mag eine von uns auf dem Tharander Reviere gemessene Tanne dienen, welche folgende Zahlen ergab.

Das horizontal gestellte Fernrohr traf den Baum 1,8 Meter über dem Boden; der Durchmesser daselbst, mit der Kluppe gemessen, ergab sich zu 17,8 Cent. Die Einstellungen auf die Zieltafeln der Latte lieferten die Index- und Trommelablesungen 2,464 und 17,231, woraus sich mit Benutzung der oben §. 27. für e und k gegebenen Werthe die Entfernung des Baumes vom Instrumente zu 25,27 Meter berechnete. Der Höhenwinkel nach der Spitze wurde gleich 35° 40′, und daraus die ganze Länge zu 1,8 + 25,27 tan 35° 40′ = 19,94 Meter gefunden. Die übrigen Ablesungen und die daraus berechneten Maße sind tabellarisch geordnet folgende.

Nr.	Höhenwinkel °	Höhenwinkel ′	Ablesung am Index und an der Trommel rechts	Ablesung am Index und an der Trommel links	Differenz beider Ablesungen.	Berechneter Durchmesser. Cent.	Höhe dieses Durchmessers über der horizontalen Visur. Meter.
1	5	27	9,956	11,931	1,975	16,9	2,41
2	12	21	9,799	11,622	1,823	16,0	5,53
3	17	58	9,641	11,208	1,567	14,1	8,20
4	24	1	9,760	10,952	1,192	11,2	11,26
5	31	22	9,725	10,350	0,625	6,3	15,41

$$\tan\alpha_4 = \frac{7}{2\cdot 6}\cdot\frac{30}{60},\quad \alpha_4 = 16^\circ\,16',$$

$$\tan\alpha_5 = \frac{9}{2\cdot 6}\cdot\frac{30}{60},\quad \alpha_5 = 20^\circ\,33',$$

$$\tan\alpha_6 = \frac{11}{2\cdot 6}\cdot\frac{30}{60},\quad \alpha_6 = 24^\circ\,37',$$

auf welche Zahlen der Theilung der Nonius des Höhenkreises einzustellen wäre.

Da die Stockhöhe 0,5 Meter und der Durchmesser daselbst 20,4 Cent betrug, so ergiebt sich, wenn man die dem Durchmesser D zugehörige Kreisfläche mit Kr_D bezeichnet, der Inhalt des Schaftes vom Stockabschnitte bis zur Spitze zu

$$V = \frac{1}{2}\Big[(Kr_{20,4} + Kr_{17,8})\,1,30 + (Kr_{17,8} + Kr_{16,9})\,2,41 + (Kr_{16,9} + Kr_{16,0})(5,53 - 2,41) + (Kr_{16,0} + Kr_{14,1})(8,20 - 5,53) + (Kr_{14,1} + Kr_{11,2})(11,26 - 8,20) + (Kr_{11,2} + Kr_{6,3})(15,41 - 11,26) + Kr_{6,3} \cdot (18,14 - 15,41)\Big]$$

$$= 0,278614 \text{ Cubicmeter.}$$

Nach der Fällung fanden sich die ganze Länge des Stammes gleich $0,5 + 19,44 = 19,94$ Meter, genau wie vorhin, und die Durchmesser, vom Stockabschnitt an in Abständen von 1 Meter gemessen, gleich

20,4 — 18,0 — 17,5 — 17,3 — 16,7 — 16,4 — 16,0 — 15,5 — 15,3 — 14,3 — 13,6 — 13,2 — 12,6 — 11,4 — 10,4 — 9,2 — 8,1 — 6,2 — 4,5 Cent, und der Mittendurchmesser des 1,44 Meter langen Spitzenstückes gleich 1,2 Cent. Aus diesen Maßen berechnet sich der Inhalt des Schaftes vom Stockabschnitt bis zur Spitze nach Simpson's Regel zu

$$V = \frac{1}{3}\left(0,034275 + 4 \cdot 0,138566 + 2 \cdot 0,125092\right) + 0,001628 = 0,281202 \text{ Cubicmeter,}$$

so daß der Fehler des ersteren Resultates gegen das letztere

$$\frac{0,281202 - 0,278614}{0,281202} = -\,0,92 \text{ Procent}$$

beträgt.

Berechnet man noch aus den mit der Kluppe gemessenen Durchmessern durch Interpolation die in den Höhen 2,41 — 5,53 — 8,20 — 11,26 — 15,41 Meter über der horizontalen Visur oder 3,71 — 6,83 — 9,50 — 12,56 — 16,71 Meter über dem Stockabschnitte gelegenen Durchmesser, so erhält man die letzteren der Reihe nach gleich

16,9 15,6 13,9 11,9 6,8

Cent, während die aus den Instrumentablesungen erhaltenen

16,9 16,0 14,1 11,2 6,3

Cent betragen. Die Differenzen der letzteren gegen die ersteren sind daher

$0 - 0,4 - 0,2 + 0,7 + 0,5$

Cent, und liegen sämmtlich innerhalb der Grenzen, welche aus den §. 27. von uns mitgetheilten Untersuchungen folgten.

Ausgedehntere Versuchsreihen über die Genauigkeit dieser Cubirungsmethode liegen noch nicht vor.

Sollte außer der Schaftmasse auch noch die Astmasse der zu berechnenden Bäume angegeben werden, so müßte dies entweder mit Hülfe der Astformzahl oder nach dem weiter unten §. 34. angeführten „Gesetze der Astmasse“ geschehen.

§. 32.

Die Berechnung des Holzgehaltes stehender Stämme aus Grundstärke und Richthöhe.

1. Die Unmöglichkeit, Durchmesser an stehenden Bäumen ohne Anwendung von Fernrohrinstrumenten mit hinreichender Genauigkeit messen zu können, führten Preßler auf ein Cubirungsverfahren, welches wenigstens bei glattschäftigen Nadelhölzern in den meisten Fällen überraschend genaue Resultate giebt.

Es wird nämlich immer leichter sein, am stehenden Stamme einen Ort zu bezeichnen, wo die Durchmesser einen aliquoten Theil der Grundstärke betragen, als daselbst die absolute Größe eines Durchmessers mittelbar genügend genau anzugeben. Davon ausgehend, suchte Preßler*) den Ort desjenigen Punktes zu bestimmen, wo die Stammstärke die Hälfte der Grundstärke beträgt. Diesen Punkt nannte er **Richtpunkt****) und den Abstand von der gemessenen Grundstärke bis zu diesem Punkte die **Richtpunktshöhe** (früher Richtpunktsoberhöhe).

Es ist nun zuerst zu untersuchen, wie sich die Inhaltsformeln der von uns behandelten regelmäßigen Körper gestalten, wenn wir in dieselben statt der ganzen Höhe (Scheitelhöhe) die Richtpunktshöhe einführen.

a. Beim geradseitigen Kegel erhält man, wenn die über $\frac{1}{2}D$ liegende Höhe mit H' bezeichnet wird,

$$H' : H = \frac{1}{2}D : D = 1 : 2,$$

oder

$$H - H' : H = 2 - 1 : 2 = 1 : 2.$$

Da die Differenz $H - H'$ gleich der Richtpunktshöhe $\mathfrak{h}$ ist, so hat man auch

$$\mathfrak{h} : H = 1 : 2$$

oder

---

*) Tharand. forstl. Jahrb. 11. B. S. 77.
**) Das. 12. B. S. 177.

$$\mathfrak{h} = \frac{1}{2} H,$$
$$H = 2\,\mathfrak{h},$$

d. h. der Punkt der halben Grundstärke liegt beim geradseitigen Kegel in der halben Höhe oder die Richtpunktshöhe ist hier gleich der halben Scheitelhöhe. Führt man statt H den Werth $2\,\mathfrak{h}$ in die Inhaltsformel $V = \frac{\pi}{12} D^2 H$ ein, so wird

$$V = \frac{\pi}{6} D^2 \mathfrak{h}$$
$$= \frac{\pi}{4} D^2 \cdot \frac{2}{3} \mathfrak{h} = \frac{2}{3}\left(\frac{\pi}{4} D^2 \mathfrak{h}\right),$$

oder auch

$$V = \frac{2}{3} G\, \mathfrak{h},$$

so daß das Volumen eines geradseitigen Kegels gleich ist dem Producte aus der Grundfläche in zwei Drittel der Richtpunktshöhe.

b. Für das Paraboloid ergiebt sich, wenn wir die vorigen Bezeichnungen beibehalten,

$$H' : H = \left(\frac{1}{2} D\right)^2 : D^2 = 1 : 4,$$

oder

$$H - H' : H = 4 - 1 : 4 = 3 : 4,$$

somit auch

$$\mathfrak{h} : H = 3 : 4$$

und

$$\mathfrak{h} = \frac{3}{4} H,$$
$$H = \frac{4}{3} \mathfrak{h},$$

so daß beim Parabelkegel der Punkt der halben Grundstärke bei drei Viertel der Scheitelhöhe sich findet. Setzt man außerdem den Werth $H = \frac{4}{3} \mathfrak{h}$ in $V = \frac{\pi}{8} D^2 H$ ein, so wird

$$V = \frac{\pi}{6} D^2 \mathfrak{h}$$
$$= \frac{\pi}{4} D^2 \cdot \frac{2}{3} \mathfrak{h} = \frac{2}{3}\left(\frac{\pi}{4} D^2 \mathfrak{h}\right)$$

und

$$V = \frac{2}{3} G\, \mathfrak{h}.$$

Die für den Inhalt des geradseitigen Kegels gefundene Cubirungsregel gilt mithin wörtlich auch für den Inhalt des Paraboloides.

c. Beim Neiloide endlich hat man

$$H'^3 : H^3 = \left(\frac{1}{2} D^2\right) : D^2 = 1 : 4$$

und daraus

$$H' : H = 1 : \sqrt[3]{4}$$

oder

$$H - H' : H = \sqrt[3]{4} - 1 : \sqrt[3]{4},$$

$$\mathfrak{h} : H = \sqrt[3]{4} - 1 : \sqrt[3]{4}.$$

Das letztere Verhältniß giebt dann

$$\mathfrak{h} = \frac{\sqrt[3]{4} - 1}{\sqrt[3]{4}} H, \text{ oder nahezu } = 0{,}37\ H.$$

$$H = \frac{\sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{4} - 1} \mathfrak{h}, \quad \text{"} \quad \text{"} \quad = 2{,}70\ \mathfrak{h}.$$

Durch Einsetzung dieses Werthes von H in die Inhaltsformel des Neiloides $V = \frac{\pi}{16} D^2 H$ erhält man

$$V = \frac{\pi}{16} D^2 \mathfrak{h} \cdot \frac{\sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{4} - 1} = \frac{\pi}{16} D^2 \mathfrak{h} \left(1 + \frac{1}{\sqrt[3]{4} - 1}\right)$$

$$= \frac{\pi}{16} D^2 \mathfrak{h} + \frac{\pi}{16} D^2 \mathfrak{h} \frac{1}{\sqrt[3]{4} - 1}.$$

Für $\frac{\pi}{16} D^2 \mathfrak{h}$ läßt sich aber schreiben

$$\frac{\pi}{4} D^2 \cdot \frac{2}{3} \mathfrak{h} \cdot \frac{3}{8} = \frac{\pi}{4} D^2 \cdot \frac{2}{3} \mathfrak{h} \left(\frac{8}{8} - \frac{5}{8}\right) = \frac{\pi}{4} D^2 \cdot \frac{2}{3} \mathfrak{h} - \frac{5\pi}{48} D^2 \mathfrak{h}.$$

Multiplicirt und dividirt man dann noch $\frac{\pi}{16} D^2 \mathfrak{h} \frac{1}{\sqrt[3]{4} - 1}$ mit 3, so wird

$$V = \frac{\pi}{4} D^2 \cdot \frac{2}{3} \mathfrak{h} + \frac{\pi}{48} D^2 \mathfrak{h} \left(5 - \frac{3}{\sqrt[3]{4} - 1}\right)$$

$$= \frac{\pi}{4} D^2 \cdot \frac{2}{3} \mathfrak{h} + \frac{\pi}{48} D^2 \mathfrak{h} \frac{5 \sqrt[3]{4} - 8}{\sqrt[3]{4} - 1}$$

$$= \frac{\pi}{4} D^2 \cdot \frac{2}{3} \mathfrak{h} + \frac{\pi}{48} D^2 \mathfrak{h} . 0{,}10725$$

$$= \frac{\pi}{4} D^2 \cdot \frac{2}{3} \mathfrak{h} + \frac{\pi}{4} D^2 \cdot \frac{2}{3} \mathfrak{h} . 0{,}0134$$

$$= \frac{2}{3} \left(\frac{\pi}{4} D^2 \mathfrak{h}\right) + \frac{2}{3} \left(\frac{\pi}{4} D^2 \mathfrak{h} . 0{,}0134\right),$$

oder auch

$$V = \frac{2}{3} G \mathfrak{h} + 0{,}0134 \cdot \frac{2}{3} G \mathfrak{h}.$$

Das Neiloid wird mithin durch die Rechnungsregel $V = \frac{2}{3} G \mathfrak{h}$ nicht genau cubirt. Vielmehr wird der Inhalt desselben darnach zu klein gefunden, und zwar, wie dies der Zahlencoefficient des zweiten Gliedes unmittelbar angiebt, um 1,34 Procent.

Diese Resultate lassen schon im Voraus vermuthen, daß die Anwendung der eben entwickelten Cubirungsregel auf Baumschäfte den Inhalt der letzteren mit nicht geringer Genauigkeit ergeben muß. Die Erfahrung hat diese Vermuthung auch bestätigt, wie die weiter unten angeführten Untersuchungen es nachweisen.

Wäre beispielsweise die Grundstärke eines Stammes gleich 23,0 Cent, seine Richtpunktshöhe gleich 13,97 Meter, so würde darnach dessen Inhalt sein

$$0{,}041548 \cdot \frac{2}{3} \cdot 13{,}97 = 0{,}386950 \text{ Cubicmeter.}$$

Derselbe Stamm, in 1,5 Meter lange Sectionen getheilt, ergab die Mittenstärken dieser zu

22,1	Cent	mit	einer	Kreisfläche	von	0,038360	Quadratmeter,
21,8	"	"	"	"	"	037325	"
20,9	"	"	"	"	"	034307	"
19,4	"	"	"	"	"	029559	"
17,8	"	"	"	"	"	024885	"
17,3	"	"	"	"	"	023506	"
16,3	"	"	"	"	"	020867	"
14,5	"	"	"	"	"	016513	"
13,4	"	"	"	"	"	014103	"
11,2	"	"	"	"	"	009852	"
8,0	"	"	"	"	"	005027	"

und ein überschießendes Stück von 0,75 Meter Länge und 3,5 Cent Mittenstärke, somit einen Gesammtinhalt von

$$0{,}254304 \cdot 1{,}5 + 0{,}000962 \cdot 0{,}75 = 0{,}382177 \text{ Cubicmeter.}$$

Die obige Rechnungsregel würde daher den Inhalt um

$$\frac{0{,}386950 - 0{,}382177}{0{,}382177}\,100 = 1{,}25 \text{ Procent}$$

zu groß gegeben haben.

2. Da der untere Durchmesser nicht unmittelbar an der Erde (dem Abhiebspunkte) gemessen werden darf, weil derselbe in diesem Falle äußerst fehlerhaft werden würde, sondern erst in einer Höhe von 1,3 — 1,5 Meter über dem Boden, so wird bei der Berechnung das zwischen der Erde (dem Abhiebspunkte) und dem Meßpunkte liegende Stück unberücksichtigt gelassen, und es muß dasselbe besonders gemessen und berechnet werden. Um aber dasselbe gleich in die Formel einbeziehen zu können, hat Preßler folgendes Verfahren eingeschlagen.

Nennt man die Länge des Stammstückes unterhalb des Meßpunktes m, so ist dasselbe mindestens einer Walze vom Durchmesser D und von der Länge m gleich zu achten, so daß, wenn man noch die Summe m + $\mathfrak{h}$, d. h. die Entfernung zwischen Richtpunkt und Boden (Abhiebspunkt) mit $\mathfrak{H}$ (Richthöhe) bezeichnet, $\mathfrak{h} = \mathfrak{H} - \mathrm{m}$ und

$$\mathrm{V} = \frac{\pi}{4}\,\mathrm{D}^2 \cdot \frac{2}{3}\left(\mathfrak{H} - \mathrm{m}\right) + \frac{\pi}{4}\,\mathrm{D}^2\,\mathrm{m}$$

wird. Aus letzterer Gleichung folgt dann

$$\mathrm{V} = \frac{\pi}{4}\,\mathrm{D}^2 \cdot \frac{2}{3}\left(\mathfrak{H} + \frac{1}{2}\,\mathrm{m}\right) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 1)$$

und

$$\mathrm{V} = \frac{2}{3}\,\mathrm{G}\left(\mathfrak{H} + \frac{1}{2}\,\mathrm{m}\right) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 2)$$

Der obige Stamm würde darnach

$$0{,}041548 \cdot \left(15{,}47 + \frac{1{,}5}{2}\right) \cdot \frac{2}{3} = 0{,}449273 \text{ Cubicmeter}$$

enthalten.

Um die Rechnung zu erleichtern, hat Preßler für den Ausdruck

$$\frac{2}{3}\,\mathrm{G}\left(\mathfrak{H} + \frac{1}{2}\,\mathrm{m}\right)$$

eine Tafel*) gegeben, welche die Durchmesser der Grundstärke und die Größe $\mathfrak{H} + \frac{1}{2}\,\mathrm{m}$ oder die „corrigirte Richthöhe“ zu Ein-

*) I. B. 3. Abth. Taf. 15. — Zuerst in „Neue holzwirthsch. Tafeln.“ Taf. VI.

gängen hat. Dieselbe giebt für $D = 23{,}0$ Cent und $\mathfrak{H} + \frac{1}{2}m = 16{,}22$ Meter, da letzteres das Mittel zwischen 16 und 16,5 Meter, den Inhalt gleich $\frac{1}{2}\left(0{,}44 + 0{,}46\right) = 0{,}45$ Cubicmeter.

Soll endlich dem Einflusse des Wurzelanlaufes Rechnung getragen werden, welcher unter Umständen gar nicht unbedeutend sein kann, so muß man überdies noch die Stärke in der halben Meßpunktshöhe messen. Ist diese D_m und G_m die ihr entsprechende Fläche, und setzt man $10\frac{D_m - D}{D} = n$, so folgt

$$D_m = \frac{n}{10}D + D = D\left(1 + \frac{1}{10}n\right),$$

so daß der Inhalt des unterhalb des Meßpunktes gelegenen Stückes

$$\frac{\pi}{4}D^2\left(1 + \frac{1}{10}n\right)^2 m$$

wird.

Mit Einführung dieses Werth statt $\frac{\pi}{4}D^2 m$ geht die Gl. 1) über in

$$V = \frac{\pi}{4}D^2 \cdot \frac{2}{3}\left(\mathfrak{H} - m\right) + \frac{\pi}{4}D^2\left(1 + \frac{1}{10}n\right)^2 m$$

$$= \frac{\pi}{4}D^2 \cdot \left(\frac{2}{3}\mathfrak{H} + \frac{1}{3}m + \frac{1}{5}mn + \frac{1}{100}mn^2\right).$$

Da man für $\frac{1}{3}m + \frac{1}{5}mn + \frac{1}{100}mn^2$ schreiben kann $\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}m + \frac{2}{3}\cdot\frac{3}{10}m + \frac{2}{3}\,\frac{3}{200}mn^2$, so wird noch

$$V = \frac{\pi}{4}D^2 \cdot \frac{2}{3}\left(\mathfrak{H} + \frac{1}{2}m + \frac{3}{10}mn + \frac{3}{200}mn^2\right).$$

Das Glied $\frac{3}{200}mn^2$ wird in den meisten Fällen vernachlässigt werden dürfen, es bleibt dann

$$V = \frac{\pi}{4}D^2 \cdot \frac{2}{3}\left(\mathfrak{H} + \frac{1}{2}m + \frac{3}{10}mn\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 3)$$

oder

$$V = \frac{2}{3}G\left(\mathfrak{H} + \frac{1}{2}m + \frac{3}{10}mn\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 4)$$

Wird auch diese Formel auf das obige Beispiel angewendet, so ist, weil $D_m = 23{,}4$ Cent,

$$10\,\frac{D_m - D}{D} = 10\,\frac{23{,}4 - 23{,}0}{23{,}0} = \frac{4}{23{,}0} = 0{,}174 = n,$$

und der Inhalt des ganzen Stammes, einschließlich des Schenkelholzes

$$\frac{\pi}{4}\cdot\left(0{,}23\right)^2\left(15{,}47 + \frac{1{,}5}{2} + \frac{3}{10}\cdot 1{,}5\cdot 0{,}174\right)\frac{2}{3}$$
$$= 0{,}451488 \text{ Cubicmeter.}$$

Die Sectionscubirung würde

$$0{,}381456 + 0{,}043005\cdot 1{,}5 = 0{,}445964 \text{ Cubicmeter,}$$

die Preßler'sche Regel daher

$$\frac{0{,}451488 - 0{,}445964}{0{,}445964}\,100 = 1{,}24 \text{ Procent}$$

zu viel gegeben haben.

3. Die Ermittelung des Richtpunktes unterliegt an gefällten Stämmen keiner Schwierigkeit. Es ist dabei nur darauf zu sehen, daß die Grundstärke nicht allzu tief gemessen werde, um den Einflüssen des Wurzelanlaufes und anderer Unregelmäßigkeiten des unteren Stammtheiles zu entgehen, also etwa bei 1,5 Meter. Außerdem giebt Preßler*) noch folgende Vorsichtsmaßregeln an. In der Nähe des Richtpunktes findet sich nämlich ein Stammstück, wo die Stärken von der halben Grundstärke wenig abweichen. Man bestimme daher den Punkt, wo der Durchmesser die halbe Grundstärke eben erreicht, und denjenigen, wo der Durchmesser eben unter dieselbe sinkt, und nehme das Mittel aus beiden Höhen als Richtpunktshöhe an. Preßler nennt (a. a. O.) diesen Stammtheil die Richtpunktszone.

Was die Anwendung des Richtpunktes zur Cubirung liegender Hölzer anlangt, so läßt sich, wie die unten zusammengestellten Mittheilungen verschiedener Beobachter nachweisen, zwar gegen die Genauigkeit der durch diese Methode erhaltenen Resultate nichts einwenden, da sie im Mittel nicht nur die gleiche, sondern sogar eine größere Genauigkeit gewährt, als die Cubirung aus der Mittenstärke, und auch keinen größeren Schwankungen der Einzelresultate unterliegt. Dagegen wird der erheblich größere Zeitaufwand, den sie erfordert, sowie der Umstand, daß zur Berechnung des Inhalts abgewipfelter Stämme erst noch eine Zwischenrechnung nöthig sein würde, deren Einführung in die Praxis zur Cubirung gefällter Hölzer wohl für immer ausschließen.

---

*) Das Gesetz der Stammbildung und dessen forstwirthschaftliche Bedeutung insbesondere für den Waldbau höchsten Reinertrags. Mit zahlreichen Holzschnitten. Leipzig, Arnoldische Buchhandlung. 1865. 8. S. 95.

Mittheilungen über die Genauigkeit dieser Methode bei der Cubirung gefällter Hölzer liegen vor von Preßler[1]), welcher an 80 Stämmen 0,89 Procent zu wenig fand, mit Schwankungen von — 8,0 bis + 8,7 Procent; weitere 100 Stämme ergaben einen durchschnittlichen Fehler von + 1,39 Procent, doch war bei diesen die Sectionscubirung wenig genau. Baur[2]) fand an 21 Kiefern und 1 Fichte im Mittel 4,47 Procent zu viel, im Einzelnen Abweichungen von — 11,0 bis + 16,4 Procent; Seidensticker[3]) an 25 Fichten im Mittel zu viel + 2,51 Procent und Einzelabweichungen von — 19,4 bis + 5,2 Procent; Micklitz[4]) an 15 Fichten und Tannen zu wenig 1,45 Procent, mit Schwankungen von — 5,4 bis + 1,2 Procent; und an 13 Laubhölzern zu wenig 0,92 Procent, mit Schwankungen von — 11,8 bis + 16,6 Procent. Judeich[5]) erhielt an 27 Fichten zu wenig 0,22 Procent, an 5 Kiefern zu viel 1,52 Procent, und im ersteren Falle Schwankungen von — 6,5 bis + 4,1, im zweiten von — 0,5 bis + 4,5 Procent; von Seebach[6]) fand an 37 Buchen zu viel 1,71 Procent, an 27 Fichten zu wenig — 0,59 Procent, und im ersten Falle Einzelabweichungen von — 7,6 bis + 17, im zweiten von — 11,8 bis + 10,6 Procent. Jäger[7]) untersuchte 41 Nadelhölzer und 14 Buchen: die ersteren gaben zu viel 0,64 Procent, im Einzelnen Abweichungen von — 6,3 bis + 7,0; die zweiten zu wenig 0,87 Procent, im Einzelnen Abweichungen von — 6,7 bis + 5,2. Preßler[8]) theilte endlich noch hannöversche Erfahrungen an 32 Buchen mit, welche im Mittel 1,06 Procent zu wenig ergaben, mit Abweichungen von — 11,0 bis + 21,4 Procent. Bieber[9]) hat 150 Tannen nach der Richtpunktsregel cubirt und einen summarischen Fehler von + 0,47 Procent gefunden. Zugleich hat derselbe die Preßlersche Formel etwas modificirt und setzt, wenn der Meßpunkt bei 1,581 Meter angenommen wird,

$$V = \frac{2}{3} G \left(\mathfrak{H} + \frac{7}{10} \cdot 1{,}581 \right).$$

Unter Anwendung dieser Formel erhielt der Letztgenannte bei den angeführten Stämmen + 0,05 Procent summarischen Fehler.

---

1) Tharand. forstl. Jahrb. 12. B. S. 190.
2) Allgem. Forst- u. Jagdz. 1859. S. 209.
3) Das. 1860. S. 106.
4) Das. 1860. S. 108.
5) Das. 1861. S. 117.
6) Supplem. z. allgem. Forst- u. Jagdz. III. B. S. 7.
7) Allgem. Forst- u. Jagdz. 1864. S. 181.
8) Das. 1865. S. 174.
9) Verhandl. d. Forstw. v. Mähren u. Schlesien. 1870. 1. H. S. 1.

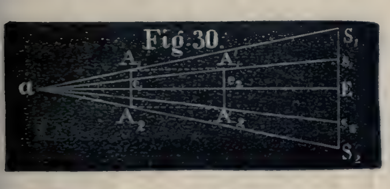
Wir selbst endlich haben 17 Kiefern untersucht und einen durchschnittlichen Fehler von + 0,86 Procent gefunden, mit Abweichungen am Einzelstamme von — 7,6 bis + 7,1 Procent.

§. 33.

Fortsetzung.

Ganz anders wie bei den gefällten Hölzern liegt dagegen die Sache bei der Ermittelung des Inhaltes stehender Stämme. Hier ist die Richthöhenmethode wenigstens bei denjenigen Holzarten, welche ihren Stamm nicht in Aeste zerspalten, also bei den glattschäftigen Nadelhölzern, sowie bei Birken und Erlen, wohl diejenige Methode, welche ohne Anwendung eines Fernrohrinstrumentes die sichersten Resultate gewährt.

Um den Richtpunkt mit etwas größerer Schärfe einschätzen zu können, als es durch das bloße Auge geschehen kann, ist noch ein kleines Instrument nöthig, welches auf folgenden Erwägungen beruht. Wenn a der Ort des Auges (Fig. 30), $S_1 S_2$ ein Gegenstand (Baumdurchmesser), A_1, A_2 zwei Diopterfäden sind, von denen der eine A_1 auf S_1, der andere A_2 auf S_2 eingestellt ist, so werden, wenn man den Abstand ae_1 des Auges von den Diopteren durch Verschiebung der letzteren (aber ohne Aenderung ihrer gegenseitigen Entfernung) verdoppelt, dieselben die Lage A'_1 und A'_2 annehmen. Wenn man nun auch in dieser zweiten Lage der Diopter die Visirstrahlen as_1, as_2 gezogen denkt, so ist in den ähnlichen Dreiecken aA_1A_2 und aS_1S_2



$$\frac{ae_1}{A_1 A_2} = \frac{aE}{S_1 S_2},$$

während aus den Dreiecken $aA'_1 A'_2$ und $as_1 s_2$

$$\frac{ae_2}{A'_1 A'_2} = \frac{aE}{s_1 s_2},$$

oder wegen $ae_2 = 2ae_1$ und $A'_1 A'_2 = A_1 A_2$,

$$\frac{2ae_1}{A_1 A_2} = \frac{aE}{s_1 s_2}$$

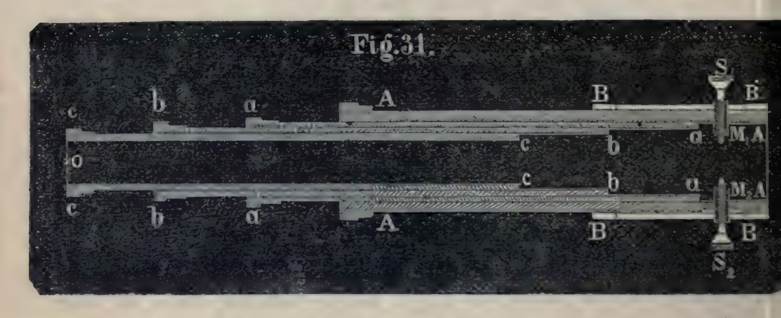
folgt. Aus beiden Gleichungen ergiebt sich durch Division

$$\frac{1}{2} = \frac{s_1 s_2}{S_1 S_2}$$

oder

$$s_1 s_2 = \frac{1}{2} S_1 S_2.$$

Diese Gleichung läßt sich zur Construction des erwähnten kleinen Instrumentes benutzen, welches zur schärferen Bestimmung des Richtpunktes dienen soll, und von Preßler deshalb Richtrohr genannt worden ist. Dasselbe besteht in seiner jetzigen Gestalt aus einem Rohre von Pappe A (Fig. 31), von etwa



17 Cent Länge und 4 Cent Weite, welches vorn mit einem kurzen Rohre B zum Blenden bei auffallendem Sonnenlichte versehen ist, sowie mit zwei Metallstücken M_1, M_2, in welchen sich zwei Schrauben S_1, S_2 so bewegen, daß deren Axen in eine Gerade fallen. Diese Schrauben dienen zugleich dazu, das Herabgleiten des Blendrohres B zu verhindern. In dem Rohre A bewegen sich noch drei Auszugsrohre a, b, c, von denen also b in a, c in b enthalten ist. Das letzte, oder c, ist an dem hinteren Ende geschlossen und in dem Verschlusse nur mit einer feinen Ocularöffnung o versehen. Jedes der Auszugsrohre trägt endlich noch eine Secantenscala, deren Theile Hundertel der ganzen oder Fünfzigstel der halben Länge des Rohres bilden. Aus Gründen, welche aus dem Folgenden erhellen werden, ist die Scala des Rohres a links von 50, rechts von 100 an beziffert, während die Theilungen der Rohre b und c nur von 50 an beziffert sind.

Das Verfahren, mit dem Richtrohre den Richtpunkt eines stehenden Stammes und somit dessen Inhalt zu finden, ist nun folgendes. Man mißt mit größtmöglicher Genauigkeit bei 1,5 Meter Höhe über dem Boden die Grundstärke des Baumes, und sodann mit dem Bande oder einem anderen Längenmesser die Entfernung AD (Fig. 32) der Baumaxe BC von dem Standpunkte A des Beobachters, welcher Standpunkt natürlich so gewählt werden muß, daß von demselben aus der obere Theil des Stammes übersehen werden kann. Sodann begiebt man sich mit dem Richtrohre auf diesen Stand, stellt alle drei Auszugsrohre a, b, c so, daß der hintere Rand von A auf der Marke 50 oder 100 der Secantenscala von a, der hintere Rand von a auf der Marke 50 der Secantenscala von b, und der hintere Rand von b auf der Marke 50 der Secantenscala von c steht, und

bewegt, indem man das Richtrohr in dieser Stellung der Rohre auf den Ort E der gemessenen Grundstärke richtet, die Schrauben S_1, S_2 so lange gegen oder aus einander, bis deren Spitzen die Endpunkte des gemessenen Durchmessers genau einfassen. Sodann zieht man die Rohre b und c aus, bis der hintere Rand von a auf der Marke 100 von b, und der hintere Rand von b auf der Marke 100 von c stehen, und sucht in dieser Stellung der Rohre den Punkt R_1, wo der Durchmesser wiederum von den ungeänderten Schraubenspitzen eingefaßt wird. Dieser Durchmesser wird nahezu, jedoch nicht ganz genau der Hälfte des ersten gleich sein, weil die Entfernung R_1A desselben vom Auge größer ist als diejenige EA der Grundstärke vom Auge. Beide Größen, R_1A und EA, findet man durch Messung der Winkel $R_1AD = \alpha_1$ und $EAD = \alpha_2$, und zwar die erstere gleich $AD \cdot \sec \alpha_1$, die zweite gleich $AD \cdot \sec \alpha_2$. Benutzt man zur Messung der Höhenwinkel z. B. den Preßler'schen Meßknecht, so erhält man neben den Winkeln unmittelbar deren Secanten, die a_1 und a_2 sein mögen.

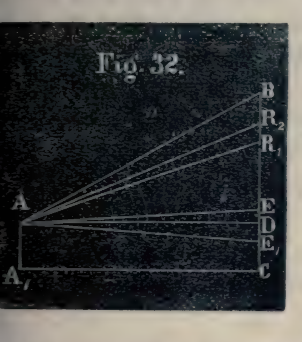


Fig. 32.

Nach diesen Vorbereitungen stellt man die Rohre b und c wieder auf 50, das Rohr a auf $\frac{1}{2} \sec \alpha_2$ oder $\frac{1}{2} a_2$ und faßt den Durchmesser bei E wieder zwischen die Schraubenspitzen. Sodann zieht man die Rohre b und c bis zur Marke 100, und das Rohr a bis zu der Marke aus, welche dem Werthe von $\sec \alpha_1$ oder a_1 entspricht und sucht in dieser Stellung der Rohre wieder den Punkt, wo der Durchmesser von den Schraubenspitzen eingefaßt wird. Stimmt dieser Punkt mit dem vorläufig angenommenen nahe überein, so kann man sich befriedigt erklären; findet dagegen zwischen beiden eine sehr große Abweichung statt, so muß man das ganze Verfahren wiederholen. Man nimmt dann den zuletzt gefundenen Punkt R_2 vorläufig als den wahren an, mißt den Höhenwinkel α'_1 noch denselben mit der Secante a'_1. Stellt man jetzt das Rohr a auf den Werth a'_1, und sucht nochmals den Punkt, wo der Durchmesser von den Schraubenspitzen eingefaßt wird, so wird dieser Punkt dem wahren Richtpunkte sehr nahe kommen. Die Richthöhe selbst erhält man aus der Gleichung

$$\mathfrak{H} = AD\ (\tan \alpha'_1 \pm \tan \alpha_2) + m,$$

wo man dem Vorzeichen von $\tan \alpha_2$ Rechnung zu tragen hat.*)

Ein Beispiel wird das ganze Verfahren noch deutlicher machen. Man hatte die Entfernung AD des Beobachters von der Stammaxe zu 40 Meter gefunden, und indem man nach dem Meßpunkte visirte, $\sec \alpha_2$ oder $a_2 = 1{,}001$ erhalten. Die Visur nach dem vorläufig angenommenen Richtpunkt ergab $\sec \alpha_1$ oder $a_1 = 1{,}16$. Darnach hätte man das Rohr a auf 50,05, das Rohr b und c auf 50 einzustellen und die Grundstärke zwischen die Schraubenspitzen zu fassen gehabt. Sodann hatte man a auf 116, b und c auf 100 zu stellen und in dieser Stellung des Rohres den Punkt der halben Grundstärke zu suchen. Dabei fand sich, daß der Punkt R_1 falsch, und zwar zu tief angenommen worden war. Die Wiederholung ergab die Secante des verbesserten Punktes zu 1,20. Es mußte somit jetzt das Rohr a auf 120 gestellt und in dieser Stellung des Rohres der Punkt R_1 nochmals geprüft werden. Hätte auch jetzt noch eine merkliche Abweichung des verbesserten Punktes von dem durch die wiederholte Prüfung erhaltenen Punkte stattgefunden, so würde eine dritte Annäherung nöthig gewesen sein.

Da zu $\sec \alpha_1 = 1{,}001$ $\tan \alpha_1 = 0{,}046$ und zu $\sec \alpha_2 = 1{,}20$ $\tan \alpha_2 = 0{,}663$ gehört, so ist die Richtpunktshöhe $= (0{,}663 - 0{,}046)\ 40 = 24{,}68$ Meter (vorausgesetzt, daß α_2 ein Höhenwinkel), mithin, wenn die Meßpunktshöhe gleich 1,5 Meter und die Grundstärke des Stammes gleich 40 Cent, die Richthöhe gleich $24{,}68 + 1{,}5 = 26{,}18$ Meter und

$$V = \frac{\pi}{4}\left(0{,}40\right)^2 \cdot \left(26{,}18 + \frac{1{,}5}{2}\right) \cdot \frac{2}{3} = 2{,}255669 \text{ Cubicmeter.}^{**})$$

Untersuchungen über die Genauigkeit, welche bei Anwendung dieser Methode in der Berechnung des Holzgehaltes stehender Stämme zu erreichen ist, liegen nur wenige vor. Preßler theilte***) die Messungen mit, welche an 100 stehenden Stämmen von ihm vorgenommen wurden, und welche einen summarischen Fehler von + 0,86 Procent ergaben. Da jedoch nur wenige dieser Stämme nach der Fällung aus kürzeren Sectionen, die meisten allein aus Ober- und Untermitte cubirt worden sind, so ist dieses Resultat wenig verläßlich. Judeich †) fand bei 22 Fichten im Mittel

*) Das negative Vorzeichen gilt, wenn E oberhalb D, das positive, wenn E unterhalb D bei E_1 liegt.

**) Tafeln zur Erleichterung der Rechnung s. I. B. 3. Abth. Taf. 15.

***) Tharand. forstl. Jahrb. 12. B. S. 197.

†) Allgem. Forst- u. Jagdz. 1861. S. 117.

einen Fehler von — 1,08 Procent, mit Schwankungen in den Einzelresultaten von — 12,2 bis + 7,8 Procent. Schaal*) erhielt an 250 Nadelhölzern und 50 Laubhölzern einen Fehler von — 0,28 Procent, und in fünfzig speciell mitgetheilten Fällen Schwankungen beim Nadelholze von — 16,8 bis + 8,6 und beim Laubholze von — 14,5 bis + 7,2 Procent.

Bei Beurtheilung dieser Stammcubirungsmethode dürfen natürlich an die Genauigkeit derselben keine höheren Forderungen gestellt werden, als an diejenige anderer Methoden, welche den Inhalt ebenfalls nur aus zwei Elementen, einer Stärke und einer Länge, cubiren. Am Besten zum Vergleiche würde die Hoßfeld'sche Methode der Cubirung aus der Scheitelhöhe und der im Drittel der Höhe gemessenen Grundstärke sich eignen, die besonders mit dem Breymann'schen Universalinstrumente sehr leicht und genau bewirkt werden könnte. Es liegen aber über die mit letzterer Methode an stehenden Stämmen zu erreichende Genauigkeit durchaus keine Untersuchungen vor. Doch sind die an stehenden Stämmen aus Grundstärke und Richthöhe erhaltenen, oben mitgetheilten Resultate so günstige und zum Vortheile dieser Methode sprechende, daß fortgesetzte Untersuchungen in dieser Richtung dringend zu wünschen sind.

Die Vorwürfe, welche man dieser Cubirungsmethode gemacht hat, sind zum Theil nicht zutreffend. Dem Einwande, daß sie fehlerhafte Resultate liefern müsse, weil sie nur den geradseitigen Kegel und das Paraboloid genau berechne, ist einfach durch die Antwort zu begegnen, daß sämmtliche Methoden der Praxis, besonders die Cubirung aus der Mittenstärke, an demselben Fehler leiden, da auch diese nur für einzelne Körperformen gültig sind. Schwerer wiegt dagegen der Einwand, daß der Richtpunkt in vielen Fällen verdeckt, bei vielen Stämmen, bei einzelnen Holzarten fast immer, durch die Zertheilung des Stammes in Aeste gar nicht vorhanden, und bei den regelmäßig gewachsenen Stämmen schwierig zu schätzen sei. Das Verdecken des Richtpunktes kann allerdings zuweilen vorkommen, allzu häufig wird es in haubaren Beständen, und um solche handelt es sich bei der Cubirung stehender Stämme doch fast immer, nicht sein. Zugegeben muß dagegen werden, daß einige Holzarten von der Cubirung nach dieser Methode ausgeschlossen werden müssen, und wir möchten die von dem Entdecker für den Fall der Zertheilung des Stammes in Aeste angegebenen Rechnungsvorschriften**) so

*) Supplem. z. allgem. Forst- u. Jagdz. V. B. S. 141.
**) Vergl. u. A. I. Bd. 1. Abth. S. 58.

lange nicht zur Anwendung vorschlagen, als nicht zahlreiche Untersuchungen deren Brauchbarkeit dargethan haben.

Der Einwand aber, daß die Schätzung des Richtpunktes an den Stämmen, wo derselbe sichtbar ist, zu schwierig sei, beruht wohl mehr in einer gewissen, allerdings berechtigten Scheu, welche dem Umstande entspringen mag, daß es sehr schwierig ist, die absolute Größe eines Durchmessers genau oder wenigstens mit einiger Schärfe anzugeben. Aber gerade diese Klippe vermeidet die Richthöhenmethode dadurch, daß sie nur fordert, den Ort eines Durchmessers aufzufinden, wo der letztere in dem denkbar einfachsten Verhältnisse zu einem anderen steht. Schon für das bloße Auge ist dies nicht allzu schwierig, und es wird dasselbe wesentlich von dem vorn beschriebenen einfachen Instrumentchen, dem Richtrohre, unterstützt. Außerdem fällt aber auch ein Fehler in der Schätzung des Richtpunktes nicht als ein Durchmesserfehler, sondern nur als ein Längenfehler in's Gewicht. Denn ist der wahre Inhalt des Stammes

$$V = \frac{2}{3} G \left(\mathfrak{H} + \frac{1}{2} m\right),$$

und ist in der Schätzung des Richtpunktes ein Fehler vorgekommen, so wird dadurch die Richthöhe $\mathfrak{H}$ um die Größe Θ verändert, welche sowohl positiv als negativ sein kann. Man erhält dann mit dieser fehlerhaften Höhe den Inhalt

$$V_1 = \frac{2}{3} G \left(\mathfrak{H} + \Theta + \frac{1}{2} m\right),$$

und den Fehler der Masse in Procenten des wahren Inhaltes zu

$$p = \frac{V_1 - V}{V} 100 = \frac{\frac{2}{3} G \left(\mathfrak{H} + \Theta + \frac{1}{2} m\right) - \frac{2}{3} G \left(\mathfrak{H} + \frac{1}{2} m\right)}{\frac{2}{3} G \left(\mathfrak{H} + \frac{1}{2} m\right)} 100$$

$$= \frac{\Theta}{\mathfrak{H} + \frac{1}{2} m} 100.$$

Hätte man z. B. in dem oben von uns berechneten Beispiele die erste Ablesung sec α_1 = 116 beibehalten, so wäre die Richthöhe um (0,663 — 0,630) 40 oder um 1,32 Meter falsch gefunden worden. Der durch diesen Längenfehler herbeigeführte Fehler in der Masse würde demnach $\frac{1{,}32}{26{,}18 + \frac{1{,}5}{2}}$ 100 = 4,9 Procent des wahren Inhaltes betragen.

Es mag hier noch auf den Zusammenhang zwischen der Lage des Richtpunktes eines Stammes und seiner echten Formzahl hingewiesen werden.*) Beim geradseitigen Kegel ist bekanntlich die Formzahl 0,369, die Richtpunktshöhe gleich 0,50 der Scheitelhöhe; beim Paraboloide entspricht der Formzahl 0,526 die Richtpunktshöhe 0,75 H. Berechnet man nun, indem man die Richtpunktshöhe um Hundertel der Scheitelhöhe fortschreiten läßt, die diesen Richtpunktshöhen zugehörigen Formzahlen, so erhält man ein Täfelchen**), dessen man sich bedienen kann, um aus der Lage des Richtpunktes eines Baumes auf seine Formzahl zu schließen und die Einschätzung der letzteren zu verificiren. Diese Prüfung wird dadurch wesentlich vereinfacht, daß man der Kenntniß der absoluten Größe der Scheitel- und Richthöhe gar nicht bedarf, sondern nur das Verhältniß dieser beiden Größen zu wissen nöthig hat, welches einfach aus den Tangenten der gemessenen Höhenwinkel abgeleitet werden kann.

Preßler hat ferner versucht, die Lage des Richtpunktes zu benutzen, um obere Stärken ohne Anwendung von Fernrohr-Instrumenten etwas genauer zu bestimmen, als dies durch bloße Ocularschätzung möglich ist. Nennt man D den Durchmesser des Meßpunktes, h die Richtpunkts-, m die Meßpunktshöhe, und bezeichnet man die geradseitige Kegelform als abholzige, die parabolische als vollholzige, so kann man aus den für diese beiden Körperformen bekannten Richtpunktshöhen und den Gleichungen ihrer Erzeugungscurven leicht folgende Tafel berechnen.***)

---

*) Es ist dies zuerst geschehen von Preßler, Supplem. z. allgem. Forst- u. Jagdz. II. B. S. 94.

**) Eine solche Zusammenstellung hat Judeich gemacht (Allgem. Forst- u. Jagdz. 1861. S. 119). Wir lassen dieselbe hier folgen:

Richtpunkt.	Formzahl.	Richtpunkt.	Formzahl.	Richtpunkt.	Formzahl.
0,50 H	0,369	0,61 H	0,438	0,72 H	0,507
51	376	62	445	73	514
52	382	63	451	74	520
53	388	64	457	75	526
54	394	65	464	76	533
55	401	66	470	77	539
56	407	67	476	78	544
57	413	68	482	79	551
58	420	69	489	80	558
59	426	70	495	81	564
60	432	71	501	82	571

***) Gesetz der Stammbildung. S. 99. und weniger ausgedehnt schon früher im Meßknecht. 3. Aufl. S. 393.

In der Höhe	beträgt bei abholzigen Baumformen oder bei der Formclasse I. — die obere Stärke d	I.—II.	mittelholzigen II.	II.—III.	vollholzigen III.
m + 0,1 h	0,95 D	0,95 D	0,95 D	0,95 D	0,96 D
0,2	90	90	91	91	92
0,3	85	85	86	87	88
0,4	80	81	82	83	84
0,5	75	76	77	78	79
0,6	70	71	72	73	74
0,7	65	66	67	68	69
0,8	60	61	62	62	63
0,9	55	55	56	56	57
1,0	50	50	50	50	50
1,1	45	44	43	42	42
1,2	40	38	36	34	32
1,3	35	31	27	24	20
1,4	30	25	—	—	—
1,5	25	—	—	—	—

Natürlich können diese Zahlen nur eine Annäherung gewähren und irgend welche Rechnungen und wirthschaftliche Maßnahmen auf dieselben nicht gegründet werden.

§. 34.

Das Gesetz der Astmasse.

Die unächten sowohl, wie die ächten Schaftformzahlen hat man, wie schon oben erwähnt, durch Einbeziehung des Ast- und Reißholzes zu Baumformzahlen ausgedehnt, so daß aus der Differenz beider die Astformzahl erhalten wird, mit deren Hülfe die Ermittelung der Ast- und Reißholzmasse erfolgen kann.

Bestimmt man aber die Schaftmasse nach der Richthöhenmethode oder durch Sectionscubirung, so müßte man, ohne andere Hülfe als diese Formzahlen, erst rückwärts wieder die Stammformzahl ermitteln, und in der Formzahltafel die dieser Stammformzahl zugehörige Astformzahl aufsuchen. Einfacher und sicherer scheint jedoch das von Preßler als „Gesetz der Astmasse" bekannt gemachte Verfahren zum Ziele zu führen, wornach sich bei angehend haubaren und haubaren Hölzern aus dem Verhältnisse der Höhe der Baumkrone zur Scheitelhöhe die Astmasse finden läßt.*)

Preßler spricht dieses Gesetz folgender Maßen aus: Wenn der Kronenansatz oder die Höhe des unbeasteten Theiles des

*) Allgem. Forst- u. Jagdz. 1864. S. 406. — Gesetz der Stammbildung. S. 105.

Stammes in einer arithmetischen Reihe erster Ordnung aufwärts rückt, nimmt das Astmassenprocent, d. h. die Astmasse im Procentsatze zur Stammmasse, in einer Reihe der zweiten Ordnung ab.

Preßler hat auf Grund von Untersuchungen, welche theils von ihm selbst, theils vom Oberförster Täger ausgeführt worden sind, folgende Tafel construirt.*)

Kronenansatz bei	Astmassenprocent			
	Fichte u. Tanne.	Kiefer.	Buche.	Birke.
	(Einschließlich der Nadeln.)		(Ausschließlich der Blätter.)	
0,9 H	5	5	6	5
8	9	11	11	6
7	14	19	17	10
6	20	29	24	16
5	27	41	32	24
4	35	55	42	(34)
3	45	(71)	55	(46)
2	56	(89)	71	(60)

Wäre also z. B. aus Grundstärke und Richthöhe der Stamminhalt einer Fichte zu 0,763 Cubicmeter, die Scheitelhöhe zu 20,5, die Höhe des unbeasteten Theiles zu 15,0 Meter gefunden worden, so wäre die Krone bei $\frac{15,0}{20,5}$ oder bei 0,73 der Scheitelhöhe angesetzt. Demnach würde die Astmasse, da dieselbe bei 0,7 der Scheitelhöhe 14, bei 0,8 dieser dagegen 9 Procent der Stammmasse ausmacht, $14 - \frac{5}{10} \cdot 3$ oder 12,5 der Stammmasse, d. h. $0,763 \cdot 0,125$ oder 0,095 Cubicmeter betragen. Die Gesammtmasse des Baumes würde somit gleich $0,763 + 0,095 = 0,858$ Cubicmeter sein.

Streng genommen gelten die Preßler'schen Zahlen nur für Hölzer vom halben bis ganzen normalen Forstalter**) und normaler, dem Erwuchse in mäßigem Schluß entsprechender Vollholzigkeit der Kronen. Bei Erwuchs in dichterem Schlusse müssen dieselben bis um's Drittel verkleinert werden; desgleichen bei älteren Hölzern.***)

*) I. B. 3. Abth. Taf. 14b. — Diese Tafel findet sich zuerst im Gesetz der Stammbildung. S. 113. Die eingeklammerten Zahlen sind durch Rechnung gefundene Werthe.

**) Ueber die Bestimmung des normalen Forstalters vergl. oben S. 123.

***) Wir hatten Gelegenheit, die Preßler'schen Zahlen einer Prüfung zu unterwerfen in einem Fichtenbestande des Tharander Revieres, der zwar das normale Forstalter schon etwas überschritten hatte, der Kronenbildung nach aber in mäßigem Schluß erwachsen sein mußte. Untersucht wurden überhaupt 91 Stämme, aber nur bei 68 derselben konnte die Krone als vollholzig bezeichnet werden; bei den übrigen 23 war dieselbe einseitig angesetzt.

Diese letzteren Stämme sind deshalb nicht weiter benutzt worden. Die Berechnung der übrigen ergab die unten folgenden Zahlen, deren Mittel mit den von Preßler angegebenen Procenten sehr nahe übereinstimmen, so daß die Letzteren recht wohl bei Bestandesschätzungen werden verwendet werden dürfen.

Kronenansatz bei	Zahl der untersuchten Stämme.	Astmassenprocent.
0,4 H	1	17
	1	28
	1	37
	1	50
	Mittel	30
0,5 H	1	14
	1	15
	1	19
	1	22
	1	23
	1	25
	1	26
	1	27
	1	36
	1	42
	Mittel	25
0,6 H	5	13
	5	14
	3	15
	3	16
	1	17
	3	18
	4	19
	1	20
	1	22
	1	23
	1	24
	1	25
	1	27
	1	33
	Mittel	18
0,7 H	2	7
	2	9
	2	10
	1	11
	1	12
	1	13
	1	14
	4	15
	2	16
	1	17
	1	18
	2	19
	1	23
	Mittel	14
0,8 H	1	5
	1	12
	Mittel	9

Weniger gut stimmen die von Preßler für die Kiefer angegebenen Astmassenprocente mit den Zahlen überein, welche wir an 17 Kiefern erhielten. Möglicher Weise liegt der Grund der Abweichung darin, daß die von uns untersuchten Stämme die Altersstufe $\frac{1}{2}$ A nur wenig überschritten hatten.

Kronenansatz bei	Zahl der untersuchten Stämme.	Astmassenprocent.
0,4 H	1	25
	1	43
	1	54
	Mittel	41
0,5 H	1	23
	1	26
	2	29
	1	30
	1	32
	1	35
	1	38
	1	42
	Mittel	32
0,6 H	2	18
	1	24
	1	27
	1	36
	Mittel	25

Anhang zum zweiten Capitel.

Zusatz 1 (zu §. 30).

Breymann's Methode zur Berechnung der Formzahlen stehender Stämme.

In eigenthümlicher Weise ermittelte Breymann mit seinem forstlichen Universalinstrumente die Formzahlen stehender Stämme.*)

Setzt man nämlich die Schaftcurve von der Form

$$y^2 = px^m$$

voraus, mißt den unteren Durchmesser D des Stammes bei $\frac{1}{20}$ der Scheitelhöhe und berechnet den Inhalt des unterhalb des Meßpunktes liegenden Stammstückes als Walze vom Durchmesser D und der Länge $\frac{1}{20}$ H, so ist der Inhalt des ganzen Baumschaftes

$$V = \frac{1}{20} G H + \frac{1}{m+1} G \left(H - \frac{1}{20} H\right)$$

$$= \left(\frac{1}{20} + \frac{19}{20(m+1)}\right) G H,$$

und die Formzahl desselben

$$f = \frac{\left(\frac{1}{20} + \frac{19}{20(m+1)}\right) G H}{G H} = \frac{1}{20} + \frac{19}{20(m+1)}.$$

Für m = 8, 4, 2, 1 und $\frac{1}{3}$ werden die Formzahlen der Reihe nach

$$f = \frac{1}{20} + \frac{19}{20 \cdot 9} = \frac{28}{180} = 0{,}156;$$

$$f = \frac{1}{20} + \frac{19}{20 \cdot 5} = \frac{24}{100} = 0{,}240;$$

$$f = \frac{1}{20} + \frac{19}{20 \cdot 3} = \frac{22}{60} = 0{,}367;$$

$$f = \frac{1}{20} + \frac{19}{20 \cdot 2} = \frac{21}{40} = 0{,}525;$$

$$f = \frac{1}{20} + \frac{19}{20 \cdot \frac{4}{3}} = \frac{61}{80} = 0{,}763.$$

Entwirft man sich nun Tafeln, welche die Werthe der Gleichungen

*) Breymann, Tafeln f. Forst-Ing. u. Taxatoren. S. 27.

$$y = \sqrt{p\,x^8} = \sqrt{p}\,x^4$$
$$y = \sqrt{p\,x^4} = \sqrt{p}\,x^2$$
$$y = \sqrt{p\,x^2} = \sqrt{p}\,x$$
$$y = \sqrt{p\,x}$$
$$y = \sqrt{p\,x^{1/3}} = \sqrt{p}\,x^{1/6}$$

für alle Werthe von $x = o$ bis $x = H$ enthalten, wenn das dem Werthe $x = H$ zugehörige y gleich 1 gesetzt wird,*) so ersieht man aus diesen Tafeln für jede Höhe die Größe des zugehörigen Durchmessers in Theilen der Grundstärke. Bildet man sich ferner noch den Quotienten $\frac{H - \frac{1}{20} H - x}{H - \frac{1}{20} H}$, oder, wenn man $H - x = h$ setzt, den Quotienten $\frac{h - \frac{1}{20} H}{H - \frac{1}{20} H}$ für alle Werthe von $H - x$ oder h, und trägt diese Werthe neben den zugehörigen Durchmessern ein, so lassen sich diese Zahlen auf folgende Weise zur Bestimmung der Schaftformzahlen der Bäume benutzen.

Mißt man nämlich an einem Baume, außer der Grundstärke D bei $\frac{1}{20} H$, in der Höhe h über dem Boden einen Durchmesser d und bildet die Quotienten $\frac{d}{D} = p$ und $\frac{h - \frac{1}{20} H}{H - \frac{1}{20} H}$, so wird, wenn man den Werth $\frac{h - \frac{1}{20} H}{H - \frac{1}{20} H}$ in der Tafel aufsucht, neben demselben der berechnete Quotient $\frac{d}{D}$ sich finden, entweder genau mit einer Zahl der erwähnten Tafel zusammenfallend, oder zwischen zwei Zahlen dieser Tafel liegend. Im ersteren Falle giebt der Kopf der Tafel unmittelbar die Schaftformzahl des Baumes an, in letzterem wird die Formzahl f des Stammes zwischen zwei Formzahlen der Tafel enthalten sein. Seien die benachbarten Formzahlen der Tafel f_1 und f_2, und zwar f_1 die kleinere, f_2 die größere, und

*) Breymann a. a. O. Taf. 18.

nennt man ebenso p_1 die kleinere, p_2 die größere Durchmesserangabe der Tafel, so ist sehr nahe

$$\frac{p_2 - p}{p_2 - p_1} = \frac{f_2 - f}{f_2 - f_1}$$

oder

$$\frac{p - p_1}{p_2 - p_1} = \frac{f - f_1}{f_2 - f_1}.$$

Aus der ersten dieser Gleichungen ergiebt sich

$$f = f_2 - (p_2 - p) \frac{f_2 - f_1}{p_2 - p_1},$$

aus der zweiten

$$f = f_1 + (p - p_1) \frac{f_2 - f_1}{p_2 - p_1}.$$

Den Quotienten $\frac{f_2 - f_1}{p_2 - p_1}$ hat Breymann der Tafel 18. seines angeführten Werkes als Δn beigefügt.

Sei, um das von Breymann gegebene Beispiel zu benutzen, $d = 18{,}2$ und $D = 21{,}5$ Wien. Zoll, $h = 27{,}0$ und $H = 82{,}4$ Wien. Fuß, so wäre $\frac{d}{D}$ oder $p = \frac{18{,}2}{21{,}5} = 0{,}847$. Dagegen wird $\frac{h - \frac{1}{20} H}{H - \frac{1}{20} H} = \frac{27{,}0 - 4{,}1}{82{,}4 - 4{,}1} = \frac{22{,}9}{78{,}3} = 0{,}29$. Tafel 18. des Breymann'schen Werkes giebt neben $\frac{h - \frac{1}{20} H}{H - \frac{1}{20} H} = 0{,}29$ die Größen $p_1 = 0{,}747$ in der Spalte der Formzahl 0,367, und $p_2 = 0{,}864$ in der Spalte der Formzahl 0,525. Daher wird

$$\begin{aligned} f &= 0{,}525 - (0{,}864 - 0{,}847) \frac{0{,}525 - 0{,}367}{0{,}864 - 0{,}747} \\ &= 0{,}525 - 0{,}017 \cdot 1{,}350 \\ &= 0{,}50, \end{aligned}$$

welches Ergebniß durch die Sectionscubirung des Stammes bestätigt wurde.

Es leuchtet sofort ein, daß, wenn man einmal das Breymann'sche Instrument aufgestellt hat, man den unbedeutenden Zeitaufwand, welchen die Messung mehrerer Durchmesser erfordert, nicht scheuen, und diese Messung ausführen wird. Dann wird man aber unmittelbar den Inhalt und nicht die Formzahl des Schaftes bestimmen. Breymann's Verfahren ist deshalb streng genommen ein leicht zu vermeidender Umweg.

Zusatz 2 (zu §. 30).

Untersuchungen über die Formverhältnisse des unteren Stammtheiles.

Zur Feststellung der Formverhältnisse des unteren Stammtheiles wurden 91 Fichten einer genauen Analyse unterworfen, indem an denselben die Durchmesser bei $\frac{1}{20}$ der ganzen Länge ($D_{1/20\,H}$), sowie bei 1,2 — 1,3 — 1,4 — 1,5 Meter über dem Boden ($D_{1,2} - D_{1,3} - D_{1,4} - D_{1,5}$) gemessen wurden. Hierauf wurden für jeden Stamm die Quotienten

$$\frac{D_{1,2}}{D_{1/20\,H}}, \frac{D_{1,3}}{D_{1/20\,H}}, \frac{D_{1,4}}{D_{1/20\,H}}, \frac{D_{1,5}}{D_{1/20\,H}}$$

gebildet und letztere dann so geordnet, daß alle in gleicher Höhe über $D_{1/20\,H}$ sich findenden in dieselbe Verticalspalte zu stehen kamen, wie die unten folgende Uebersicht (a) dies zeigt. Da die Länge der untersuchten Stämme zwischen 14 und 34 Meter schwankte, so erhielt man, da $\frac{14}{20} = 0{,}7$ und $\frac{34}{20} = 1{,}7$, die Durchmesserverhältnisse bei 0,1 — 0,2 — 0,3 . . . 0,8 Meter über und bei 0,1 — 0,2 — . . . 0,5 Meter unter $D_{1/20\,H}$. Quadrirt man sodann die in den einzelnen Verticalspalten vorkommenden Verhältnisse, addirt die Quadrate (b), und dividirt diese Summen durch die Anzahl der Summanden (c), so erhält man die mittleren Werthe der 0,1 — 0,2 — 0,3 — . . . Meter über und 0,1 — 0,2 — . . . 0,5 Meter unter $D_{1/20\,H}$ gelegenen Baumquerflächen im Verhältniß zur Fläche bei $\frac{1}{20}$ H (d), und durch Ausziehen der Quadratwurzeln die Durchmesser dieser Querflächen im Verhältniß zum Durchmesser bei $\frac{1}{20}$ H (e). Diese letzteren Zahlen zeigen, daß die Durchmesserabnahme unterhalb $\frac{1}{20}$ H und oberhalb bis zu $\frac{1}{20}$ H + $0{,}3^m$ stärker ist als von $\frac{1}{20}$ H + $0{,}3^m$ bis zu $\frac{1}{20}$ H + $0{,}8^m$. Denn rundet man diese Durchmesser auf zwei Decimalstellen ab, so erhält man mit einigen kleinen Aenderungen

1,05 — 1,04 — 1,03 — 1,02 — 1,01 — (1,00) — 0,99 — 0,98 — 0,97 — $0{,}96_5$ — 0,96 — $0{,}95_5$ — 0,95 — $0{,}94_5$.

Daraus folgt, daß die Durchmesser unterhalb $\frac{1}{20}$ H bis zu $\frac{1}{20}$ H + $0{,}3^m$ 1 Procent, die Flächen also 2 Procent für jeden

Decimeter zu= bezüglich abnehmen, während die Abnahme von $\frac{1}{20}$ H + 0,3^{m} bis $\frac{1}{20}$ H + 0,8^{m} bei den Durchmessern nur 0,5, bei den Flächen 1 Procent beträgt.

Zur Berechnung der in §. 30. mitgetheilten Correctionstafel ist jedoch die Aenderung durchgängig gleich 2 Procent angenommen worden.

a. Wird der Durchmesser bei $\frac{1}{20}$ der ganzen Länge = 1 gesetzt, so beträgt derselbe bei

m 0,5	m 0,4	m 0,3	m 0,2	m 0,1	m 0,1	m 0,2	m 0,3	m 0,4	m 0,5	m 0,6	m 0,7	m 0,8
unter diesem Punkte					über diesem Punkte							
.	.	.	.	.	.	.	.	.	0,94	0,92	0,92	0,92
.	.	.	.	.	.	.	.	.	97	95	91	91
.	.	.	.	.	.	.	.	.	99	99	98	95
.	.	.	.	.	.	.	.	0,97	97	96	96	.
.	.	.	.	.	.	.	.	99	99	99	99	.
.	.	.	.	.	.	.	.	98	97	96	96	.
.	.	.	.	.	.	.	0,98	96	96	93	.	.
.	.	.	.	.	.	.	94	93	93	93	.	.
.	.	.	.	.	.	.	98	97	97	95	.	.
.	.	.	.	.	.	.	1,00	99	99	99	.	.
.	.	.	.	.	.	.	99	97	97	96	.	.
.	.	.	.	.	.	.	96	95	93	92	.	.
.	.	.	.	.	.	.	97	97	96	96	.	.
.	.	.	.	.	.	.	1,00	99	99	99	.	.
.	.	.	.	.	.	.	98	96	96	95	.	.
.	.	.	.	.	.	.	99	99	99	99	.	.
.	.	.	.	.	.	0,99	96	96	96	.	.	.
.	.	.	.	.	.	99	99	98	97	.	.	.
.	.	.	.	.	.	99	99	97	97	.	.	.
.	.	.	.	.	.	98	97	96	95	.	.	.
.	.	.	.	.	.	1,00	1,00	99	99	.	.	.
.	.	.	.	.	.	99	99	99	97	.	.	.
.	.	.	.	.	.	1,00	98	95	94	.	.	.
.	.	.	.	.	.	98	97	97	96	.	.	.
.	.	.	.	.	.	99	98	96	95	.	.	.
.	.	.	.	.	.	98	95	94	90	.	.	.
.	.	.	.	.	.	98	98	97	97	.	.	.
.	.	.	.	.	.	99	97	96	96	.	.	.
.	.	.	.	.	.	96	93	93	93	.	.	.
.	.	.	.	.	0,96	95	95	94	.	.	.	.
.	.	.	.	.	99	98	98	97	.	.	.	.
.	.	.	.	.	1,00	1,00	99	98	.	.	.	.
.	.	.	.	.	98	97	96	92	.	.	.	.
.	.	.	.	.	1,00	1,00	99	99	.	.	.	.
.	.	.	.	.	1,00	98	98	97	.	.	.	.
.	.	.	.	.	98	97	96	95	.	.	.	.
.	.	.	.	.	98	98	98	97	.	.	.	.
.	.	.	.	.	97	97	96	96	.	.	.	.
.	.	.	.	.	99	96	93	93	.	.	.	.
.	.	.	.	.	98	97	97	97	.	.	.	.
.	.	.	.	.	1,00	1,00	99	99	.	.	.	.
.	.	.	.	.	1,00	1,00	99	99	.	.	.	.
.	.	.	.	.	98	97	97	97	.	.	.	.
.	.	.	.	.	1,00	99	98	98	.	.	.	.

Wird der Durchmesser bei $\frac{1}{20}$ der ganzen Länge = 1 gesetzt, so beträgt derselbe b

m 0,5	m 0,4	m 0,3	m 0,2	m 0,1	m 0,1	m 0,2	m 0,3	m 0,4	m 0,5	m 0,6	m 0,7	m 0,8
unter diesem Punkte					über diesem Punkte							
.	.	.	.	.	1,00	1,00	0,99	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	98	97	95	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	97	96	95	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	99	98	97	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	99	99	98	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	1,00	99	98	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	99	98	97	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	96	96	95	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	96	95	94	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	98	98	96	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	99	98	97	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	99	98	97	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	99	99	99	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	99	98	97	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	99	99	99	.	.	.	.	.
.	.	.	.	1,02	1,00	1,00	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	1,00	99	98	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	1,01	98	98	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	1,00	1,00	1,00	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	1,00	99	98	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	1,00	99	98	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	1,00	93	90	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	1,00	1,00	99	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	1,00	99	98	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	1,00	98	98	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	1,00	99	99	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	1,00	99	99	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	1,00	99	99	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	1,03	1,00	99	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	1,03	1,00	1,00	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	1,00	1,00	98	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	1,01	1,00	98	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	1,01	99	99	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	1,00	99	99	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	1,00	99	98	.	.	.	.	.	.
.	.	.	1,00	1,00	98	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	1,00	1,00	98	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	1,02	1,00	98	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	1,01	1,00	99	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	1,04	1,02	1,00	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	1,01	1,00	98	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	1,02	1,00	1,00	.	.	.	.	.	.	.
.	.	1,04	1,03	1,00	.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	1,02	1,01	1,00	.	.	.	.	.	.	.	.
.	1,03	1,02	1,01	1,01	.	.	.	.	.	.	.	.
1,05	1,05	1,04	1,04	.	.	.	.	.	.	.	.	.
1,05	1,03	1,03	1,00	.	.	.	.	.	.	.	.	.

Es beträgt

b. die Summe der Quadrate der in den einzelnen Verticalreihen enthaltenen Zahle

2,2050	3,2243	5,3049	12,3853	30,2830	55,5788	60,7174	50,1750	38,3203	26,8552	14,7170	5,4582	2,5

c. die Zahl der in diesen Reihen enthaltenen Einzelmessungen

2	3	5	12	30	57	63	53	41	29	16	6	3

d. der Inhalt der mittleren Kreisflächen, diejenige bei $\frac{1}{20}$ der ganzen Länge = 1 gese

1,1025	1,0748	1,0610	1,0321	1,0094	0,9751	0,9638	0,9467	0,9346	0,9260	0,9198	0,9097	0,84

e. der mittlere Durchmesser, denjenigen bei $\frac{1}{20}$ der ganzen Länge = 1 gesetzt,

1,050	1,037	1,030	1,016	1,005	0,988	0,982	0,973	0,967	0,962	0,959	0,954	0,92

Zusatz 3 (zu §. 32).

Untersuchungen über die Richthöhenmethode.

Wir haben oben §. 32. durch Induction gefunden, daß das Volumen des geradseitigen Kegels und des Parabelkegels genau, dasjenige des Neiloides mit geringem negativen Fehler nach der Formel

$$V = \frac{\pi}{4} D^2 \cdot \frac{2}{3} \mathfrak{h},$$

in welcher $\mathfrak{h}$ die Richthöhe bedeutet, gefunden werden kann.

Es soll hier noch untersucht werden,*) ob außer den angeführten noch andere Körper vorkommen, welche sich nach dieser Rechnungsregel cubiren lassen. Bei dieser Untersuchung wollen wir uns jedoch auf Körperformen beschränken, welche eine Erzeugungscurve von der Form

$$y^2 = p x^m \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 1)$$

besitzen.

Das Volumen des Umdrehungskörpers dieser Curve wird gefunden zu

$$V = \pi \int y^2 \, dx = \frac{1}{m+1} R^2 \pi H, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 2)$$

wenn man mit R den Halbmesser der senkrecht zur Axe des Körpers stehenden Grundfläche, und mit H die Entfernung dieser Fläche vom Scheitel bezeichnet.

Aus Gl. 1) ergiebt sich ferner

$$y_1^2 : y^2 = x_1^m : x^m$$

und, wenn man $y_1 = \frac{1}{2} y$, $x = H$, $x - x_1 = \mathfrak{h}$ setzt,

$$\mathfrak{h} = \frac{2^{\frac{2}{m}}}{2^{\frac{2}{m}} - 1} H,$$

wo $\mathfrak{h}$ wieder die Richthöhe bedeutet. Nach Einführung dieses Werthes in Gl. 2) geht diese letztere über in

$$V = \frac{1}{m+1} \cdot \frac{2^{\frac{2}{m}}}{2^{\frac{2}{m}} - 1} R^2 \pi \mathfrak{h} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 3)$$

---

*) Diese Untersuchung ist von uns bereits früher ausgeführt und veröffentlicht worden. Vergl. Krit. Blätt. 46. B. 2. H. S. 183.

Vergleicht man diesen Ausdruck mit dem von Preßler gegebenen

$$V = \frac{2}{3} R^2 \pi \mathfrak{h}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 4)$$

so muß, wenn beide Ausdrücke zusammenfallen sollen,

$$\frac{1}{m+1} \; \frac{2^{\frac{2}{m}}}{2^{\frac{2}{m}} - 1} = \frac{2}{3}$$

sein, und die Wurzeln m_0, m_1, m_2 .... dieser Gleichung werden diejenigen Curven charakterisiren, deren Umdrehungskörper nach Gl. 4) genau cubirt werden können.

Ordnet man die zuletzt gefundene Gleichung, so geht dieselbe über in die neue

$$2^{\frac{2}{m}} . m - 2^{\frac{2}{m} - 1} - m - 1 = o \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 5)$$

welche die beiden reellen Wurzeln $m_0 = +1$, $m_1 = +2$ besitzt. Diesen Wurzeln entsprechen die Curven $y^2 = px$ und $y = px$, und es wird damit der Satz bewiesen, daß nur der Umdrehungskörper der Apollonischen Parabel und der geradseitige Kegel aus Grundstärke und Richthöhe genau cubirt werden können.

Die Gleichung 5) giebt aber noch ein bequemes Mittel an die Hand den Fehler zu bestimmen, welchen man bei Anwendung der Formel 4) für andere Werthe von m als + 1 und + 2 begeht, und es läßt sich leicht eine Correction herleiten, um diese Formel für alle Werthe von m brauchbar zu machen.

Setzt man nämlich Gl. 5) gleich $\mathfrak{F}(m)$, so daß

$$\mathfrak{F}(m) = 2^{\frac{2}{m}} \cdot m - 2^{\frac{2}{m} - 1} - m - 1,$$

so wird die Correction, welche der Gl. 4) beigefügt werden muß, gleich

$$- \frac{2}{3} R^2 \pi \mathfrak{h} . \frac{\mathfrak{F}(m)}{(m+1)\,(2^{\frac{2}{m}} - 1)},$$

so daß man hat

$$V = \frac{2}{3} R^2 \pi \mathfrak{h} - \frac{2}{3} R^2 \pi \mathfrak{h} . \frac{\mathfrak{F}(m)}{(m+1)\,(2^{\frac{2}{m}} - 1)},$$

und es drückt zugleich das zweite Glied rechter Hand, mit entgegengesetztem Vorzeichen genommen, den Fehler aus, welchen man durch Ausdehnung der Gleichung 4) auf alle Werthe von m begeht.

Der Anschaulichkeit wegen haben wir in der folgenden Tabelle eine Anzahl Werthe von $\mathfrak{F}(m)$ zusammengestellt.

m	$\mathfrak{F}$ (m)	m	$\mathfrak{F}$ (m)	m	$\mathfrak{F}$ (m)
$-\infty$	$-\frac{3}{2}+2$ log. nat. 2 $= -0{,}11371$	+1,5	+0,01984	+0,1	−41944,2
+10	−0,08736	+1,4	+0,02262	+0	$-\infty$
+9	−0,08450	+1,3	+0,02388	−0	−1
+8	−0,08095	+1,2	+0,02236	−1	−0,37500
+7	−0,07641	+1,1	+0,01582	−2	−0,25000
+6	−0,07044	+1,0	0	−3	−0,20486
+5	−0,06221	+0,9	−0,03355	−4	−0,18198
+4	−0,05025	+0,8	−0,10294	−5	−0,16822
+3	−0,03150	+0,7	−0,25084	−6	−0,15905
+2	0	+0,6	−0,59206	−7	−0,15251
+1,9	+0,00403	+0,5	−1,50000	−8	−0,14762
+1,8	+0,00816	+0,4	−4,60000	−9	−0,14382
+1,7	+0,01228	+0,3	−21,6187	−10	−0,14078
+1,6	+0,01611	+0,2	−308,400	$-\infty$	$-\frac{3}{2}+2$ log. nat. 2 $= -0{,}11371$

Setzt man z. B. m = 3, läßt also die Erzeugungscurve zur Neil'schen Parabel werden, so ist $\mathfrak{F}$ (m) = − 0,03150 und

$$V = \frac{2}{3} R^2 \pi \mathfrak{h} + \frac{2}{3} R^2 \pi \mathfrak{h} \frac{0{,}03150}{4\left(\sqrt[3]{2^2}-1\right)}$$

$$= \frac{2}{3} R^2 \pi \mathfrak{h} + \frac{2}{3} R^2 \pi \mathfrak{h} \,.\, 0{,}0134,$$

übereinstimmend mit dem Resultate des §. 32.

Aus der obigen Tafel lassen sich außerdem leicht einige nicht uninteressante Sätze ableiten.

1. Der Fehler ist fast durchgehends ein negativer, d. h. das Volumen wird aus Grundstärke und Richthöhe zu klein gefunden für alle Werthe von m, außer denjenigen, welche zwischen + 2 und + 1 liegen. Für diese wird der Fehler positiv und erreicht sein Maximum $\mathfrak{F}$ (m) = + 0,02388 für m = + 1,29475, wie man leicht durch Auflösung der Gleichung

$$\mathfrak{F}^1(m) = 2^{\frac{2}{m}} + \frac{2^{\frac{2}{m}} \text{ log. nat. } 2}{m^2} - \frac{2^{\frac{2}{m}+1} \text{ log. nat. } 2}{m} - 1 = 0$$

findet. Für diesen letzteren Werth von m wird das Volumen

$$V = \frac{2}{3} R^2 \pi \mathfrak{h} - \frac{2}{3} R^2 \pi \mathfrak{h} \,.\, 0{,}00543.$$

Ferner folgt aus den mitgetheilten Zahlen, daß die Richthöhenmethode für die Werthe m = + 1 bis m = + ∞ einen hohen Grad von Genauigkeit besitzt, daß sie dagegen unbrauchbar wird gegen m = 0 hin, d. h. je mehr sich der Körper der Walzenform nähert.

Zweiter Theil.

Die Berechnung des Holzgehaltes ganzer Bestände.

Erster Abschnitt.

Die Ermittelung des Holzgehaltes ganzer Bestände durch Schätzung.

§. 34.

Die Ermittelung des Holzgehaltes ganzer Bestände durch Ocularschätzung.

So wie von einzelnen Bäumen läßt sich auch von Baumcomplexen, d. h. von Beständen, der Holzgehalt durch Ocularschätzung ermitteln. Das dabei einzuhaltende Verfahren kann ein doppeltes sein.

Bei dem einen dieser beiden Verfahren durchgeht der Schätzende den Bestand, spricht jeden einzelnen Stamm desselben auf seinen Inhalt an und findet in der Summe der Stamminhalte den Inhalt des Bestandes. Das Durchgehen des Bestandes geschieht streifenweise, und jeder bereits geschätzte Baum erhält dabei nach der Richtung des nächsten Streifens hin ein Zeichen, welches entweder in einem hellen Farbenstriche oder in einer Marke besteht, welche mit einem Beile oder einem Reißer, wie dergleichen zum Bezeichnen der Durchforstungshölzer benutzt werden, in die Rinde eingerissen wird.

Zweckmäßig ist es, wenn behufs der Schätzung nicht eine, sondern mehrere Personen (geübte Holzhauer) den Bestand in parallel laufenden Streifen durchgehen. Diese Streifen dürfen jedoch nur schmal sein, so daß die in denselben sich bewegenden Schätzer von ihrem Wege aus jeden einzelnen Stamm

noch scharf in's Auge fassen können. Damit die schätzenden Personen die parallele Richtung leichter einzuhalten vermögen, zerlegt man die Bestände durch darin sich vorfindende Wege, Fußsteige, Wasserläufe ꝛc. in kleinere Theile und nimmt die Schätzung innerhalb jedes dieser kleinen Theile vor. Wenn in größeren Beständen derartige natürliche Trennungslinien fehlen, muß man sich auf irgend eine Weise, z. B. durch ausgespannte Schnuren ꝛc., künstliche Abschnitte herzustellen suchen.

Die oben §. 28. bei der Bestimmung des Holzgehaltes einzelner Bäume durch Ocularschätzung angegebenen Fehlerquellen werden bei der Bestandesschätzung theilweise in stärkerem, theilweise in schwächerem Maße gleichfalls einwirken. Wenn auch das fortgesetzte Schätzen von Stämmen einer Holzart natürlich die Sicherheit der Schätzung erhöhen wird, so wird doch die bald eintretende Ermüdung auch wieder eine geringere Aufmerksamkeit und damit eine neue Fehlerquelle herbeiführen. Man wird daher, wie bei der Schätzung von Einzelstämmen, Ergebnisse, welche der Wahrheit bis auf 10 Procent nahe kommen, als ganz ausgezeichnete ansehen müssen, im Durchschnitte aber Fehler von 20, in einzelnen Fällen selbst von 30 und mehr Procent erwarten dürfen. Vergleichende Untersuchungen über die Genauigkeit dieser Schätzungsmethode liegen unseres Wissens nicht vor.

Man kann bei der Bestandesschätzung aber auch auf folgende Weise verfahren. Der Schätzende durchgeht den Bestand nach allen Richtungen, schätzt die Größe der in demselben etwa vorkommenden größeren holzleeren Stellen und bringt dieselbe von der Größe des Bestandes, welche bekannt sein muß, in Abzug. Sodann wählt derselbe innerhalb des Bestandes einige kleine Flächen von etwa 1 Ar Inhalt, welche ihrer Bestockung nach der durchschnittlichen Beschaffenheit des Bestandes zu entsprechen scheinen, schätzt den Holzgehalt dieser kleinen Flächen und findet aus dem Mittel derselben den Holzgehalt eines Ares, und durch Multiplication dieser letzteren Größe mit der Größe der bestandenen Fläche den Holzgehalt des ganzen Bestandes. Dieses Verfahren ist mithin nichts anderes als eine etwas rohe Form der in §. 42. behandelten Ermittelung der Bestandesmasse durch Probeflächen.

In dieser oder wenigstens ähnlicher Weise wird meistens von den sächsischen Taxatoren verfahren. Ueber die bei dieser Methode zu erreichende Genauigkeit geben die nachstehenden, einem Wirthschaftsbuche entnommenen Zusammenstellungen einigen Aufschluß. Unter 45 Schätzungen, welche mit dem Verschlage verglichen werden konnten, waren 31 zu niedrig und nur 14 zu hoch. Von den ersteren waren

5 zwischen 0,1 und 5 Procent fehlerhaft,
1 „ 5,1 „ 10 „ „
4 „ 10,1 „ 15 „ „
5 „ 15,1 „ 20 „ „
3 „ 20,1 „ 25 „ „
3 „ 25,1 „ 30 „ „
4 „ 30,1 „ 35 „ „
3 „ 35,1 „ 40 „ „
2 „ 40,1 „ 45 „ „
1 „ 45,1 „ 50 „ „

von den letzteren dagegen zeigten

6 einen Fehler von 0,1 bis 5 Procent,
2 „ „ „ 5,1 „ 10 „
4 „ „ „ 10,1 „ 15 „
2 „ „ „ 15,1 „ 20 „

Sehr empfehlenswerth ist sicher keine von diesen beiden Schätzungsarten, ganz besonders aber die erstere nicht. Dieselbe erfordert nämlich einen gar nicht unbedeutenden Zeitaufwand, so daß man in wenig längerer Zeit, also auch mit nur unerheblich größeren Mitteln, durch bessere Methoden wesentlich richtigere Resultate erreichen kann. Beiden Methoden haftet überdies noch der Fehler an, daß sie durch wiederholte gleichartige Operationen nicht geprüft werden können, da eine zweite Schätzung genau denselben oder einen noch größeren Fehler, vielleicht jetzt in entgegengesetzter Richtung ergeben kann.*)

---

*) Als eine besondere Form der Ocularschätzung ist noch die Bestimmung der Holzmasse eines Bestandes mit Hülfe von Ertragstafeln zu betrachten. Letztere geben bekanntlich den Ertrag normal bestandener Flächen auf verschiedenen Standorten bei verschiedenen Altersstufen an, und werden bei Ertragsregelungen zur Vorausbestimmung künftig erfolgender Erträge benutzt. Beim Gebrauche dieser Tafeln zur Schätzung der jetzt vorhandenen Holzmasse der Bestände hätte man daher einmal die Standortsgüte des Bestandes zu schätzen, dann die Abweichung der vorhandenen Holzmasse von der normalen. Beide Schätzungen, besonders aber die letztere, dürften jedoch ebenso großen Schwierigkeiten unterliegen, wie die Schätzung der Holzmasse selbst. Denn für die Standortsgüte hat man meistens keinen anderen Maßstab als die Bestandesgüte: entsprechen sich beide nicht, so wird man bedeutende Fehler in der Schätzung der ersteren Größe begehen können. Man muß deshalb bei der Schätzung der Standortsgüte eines Bestandes auch die angrenzenden Bestände, besonders jüngere, zu Hülfe nehmen. Ebenso wird sich das Verhältniß der wirklich vorhandenen Holzmasse zur normalen gleichfalls nur schwierig angeben lassen. Eine große Erleichterung der Ocularschätzung oder eine merkliche Vermehrung der Sicherheit derselben wird mithin durch Anwendung dieser Tafeln kaum erzielt werden.

Zweiter Abschnitt.

Die Berechnung des Holzgehaltes ganzer Bestände durch stammweise Aufnahme.

§. 35.

Einleitung.

Wären die Holzbestände ganz gleichartig, d. h. wären alle Baumindividuen eines Bestandes in Stärke, Höhe und Form übereinstimmend, so unterläge die Ermittelung des Holzgehaltes derselben keinen Schwierigkeiten. Man brauchte dann nur die in dem Bestande, dessen Holzgehalt man berechnen will, sich vorfindenden Bäume zu zählen, von einem derselben auf irgend eine Art den Holzgehalt zu bestimmen und diesen mit der Stammzahl zu multipliciren, um den Holzgehalt des ganzen Bestandes zu erhalten.

Bestände von solcher Regelmäßigkeit finden sich aber in unseren Wäldern nicht vor. Man kann sich jedoch derartige Bestände dadurch verschaffen, daß man die Bäume eines Bestandes nach Stärke und Höhe mißt, und alle in diesen beiden Größen übereinstimmenden Individuen zusammenfaßt. Man zerlegt sich auf diese Weise jeden Bestand gewissermaßen in eine Anzahl kleinerer Bestände, welche der oben gestellten Bedingung der Gleichartigkeit genügen, und von welchen der Holzgehalt bestimmt werden kann, wenn in jedem der Gehalt eines Stammes (Modellstammes) berechnet wird.

Wollte man bei Bildung dieser Abtheilungen innerhalb der Bestände in größter Strenge verfahren und auch die kleinsten Abweichungen der Stärke und Höhe berücksichtigen, so würde man die aufzuwendende Arbeit ganz ungemein vermehren. Man bildet deshalb nicht allein gewisse Durchmesserstufen, d. h. man rundet die Maße aller Durchmesser auf bestimmte gleich weit von einander abstehende Zahlen ab, sondern man faßt zuweilen auch diese Durchmesserstufen wieder in Klassen (Stärkeklassen) zusammen, desgleichen die Höhen, und berechnet auf später anzugebende Weise den Durchmesser des Modellstammes jeder Klasse. Für die Weite dieser Klassen läßt sich eine bestimmte Vorschrift nicht geben; sie hängt ab von dem Grade der Genauigkeit, mit welcher der Holzgehalt des Bestandes ermittelt werden soll. Die Art der Auswahl und der Berechnung der Modellstämme ist gleichfalls verschieden. Entweder nämlich werden solche Stämme für jede Stärken- und Höhenklasse ausgewählt, gefällt und im

Liegen berechnet (strengste Methode), oder man betrachtet die Höhen als von den Stärken abhängig, bildet demgemäß nur Stärkenklassen und fällt und berechnet für diese Modellstämme; oder endlich, man faßt alle Stämme eines Bestandes zusammen und bestimmt nur die Stärke eines Modellstammes, den man dann fällt und im Liegen cubirt.

Man ermittelt auf diese Weise wohl auch nur die Holzmasse von einem kleinen Theile des Bestandes und schließt aus der Fläche oder Stammzahl und Holzmasse dieses kleinen Theiles und aus der Fläche und Stammzahl des ganzen Bestandes auf die Holzmasse des letzteren. Andererseits erspart man sich wohl auch die Fällung und Berechnung der Modellstämme, indem man nur die mittlere Formzahl des Bestandes schätzt und mit dieser den Holzgehalt des Bestandes berechnet.

Jede dieser Methoden soll in den folgenden Paragraphen näher erläutert werden.

§. 36.

Ermittelung der Stammzahl, der Stammdurchmesser und der Stammhöhen eines Bestandes.

1. Jede der im vorigen Paragraphen angedeuteten Methoden der Bestandesmassenermittelung bedarf der Kenntniß der Stammzahl und der Stammdurchmesser des Bestandes. Beide Arbeiten, die Ermittelung der Stammzahl und die Messung der Stammdurchmesser, werden zu gleicher Zeit ausgeführt, indem mit der Messung der Durchmesser das Zählen der Stämme verbunden wird.

Die Messung der Durchmesser geschieht mit der Kluppe, deren Maßstab zweckmäßiger Weise die in Figur 4. angegebene Einrichtung erhält, durch welche das Abrunden der Maße der Willkür des Kluppenführers entzogen wird, und zwar in einer constanten Höhe von 1,3 bis 1,5 Meter über dem Boden (Brusthöhe). Diese Höhenstufe ist zu wählen, weil, je höher am Stamme die Durchmesser gemessen werden, um so mehr die durch den Wurzelanlauf bedingten Unregelmäßigkeiten der Baumquerflächen verschwinden. Um diese constante Höhe an jedem Stamme leicht und sicher zu erhalten, bringt man an der Brust des Kluppenführers eine um diese Höhe von dem Fußboden abstehende Marke an, bis zu welcher dann der Kluppenführer beim Messen die Kluppe stets zu erheben hat. Meistens wird es genügen von jedem Stamme nur einen Durchmesser zu messen. Sollten jedoch Stämme von besonders unregelmäßiger Grundfläche vorkommen, so greift man zwei sich rechtwinkelig

Muster 1.

(für das Manual, wenn nur Stärkemessungen vorgenommen werden.)

Forstrevier: Tharand.
Forstort: Am S-Berg.
Abtheilung: 15a.

Durchmesser bei 1,5m über dem Boden. Cent.	Holzart: Fichte.	Stammzahl.	Durchmesser bei 1,5m über dem Boden. Cent.	Holzart: Kiefer.	Stammzahl.	Bemerkungen.
15.	𝍸𝍸𝍸𝍷𝍷𝍷	18				Fünf Tannen von 18, 19, 20, 27 und 30 Cent Durchmesser wurden den Fichten zugezählt.
16.	𝍸𝍷𝍷𝍷𝍷	9				
17.	𝍸𝍸𝍸𝍸𝍸𝍷𝍷	27				
18.	𝍸𝍸𝍸𝍸𝍸𝍸𝍸𝍸𝍸	45				
19.	𝍸𝍸𝍸𝍸𝍸𝍸𝍸𝍸𝍸	45				
20.	𝍸𝍸𝍸𝍸𝍸𝍸𝍸𝍸𝍸	45				
21.	𝍸𝍸𝍸𝍸𝍸𝍸𝍸𝍷	36				
22.	𝍸𝍸𝍸𝍸𝍸𝍸𝍸𝍸𝍸𝍸𝍸𝍸𝍷𝍷𝍷	63				
23.	𝍸𝍸𝍸𝍸𝍸𝍸𝍸𝍸𝍸𝍸𝍸𝍸𝍷𝍷𝍷	63				
24.	𝍸𝍸𝍸𝍸𝍸𝍸𝍸𝍸𝍸𝍸𝍸𝍸𝍸𝍸𝍸𝍸𝍷	81				
25.	𝍸𝍸𝍸𝍸𝍸𝍸𝍸𝍸𝍸	45				
26.	𝍸𝍸𝍸𝍸𝍸𝍸𝍸𝍷	36				
27.	𝍸𝍸𝍸𝍸𝍸𝍸𝍸𝍸𝍸𝍸𝍸𝍸𝍸𝍸𝍸𝍸𝍷	81				
28.	𝍸𝍸𝍸𝍷𝍷𝍷	18				
29.	𝍸𝍸𝍸𝍸𝍸𝍸𝍸𝍷	36				
30.	𝍸𝍸𝍸𝍸𝍸𝍷𝍷	27				
31.	𝍸𝍷𝍷𝍷𝍷	9				
32.	𝍸𝍸𝍸𝍸𝍸𝍸𝍸𝍸𝍸	45				
33.	𝍸𝍸𝍸𝍸𝍸𝍷𝍷	27				
34.	𝍸𝍸𝍸𝍷𝍷𝍷	18				
35.		.				
36.	𝍸𝍷𝍷𝍷𝍷	9				
37.	𝍸𝍷𝍷𝍷𝍷	9				
38.	𝍸𝍷𝍷𝍷𝍷	9				
39.		.				
40.		.				
41.	𝍸𝍷𝍷𝍷𝍷	9				
42.		.				
43.	𝍸𝍷𝍷𝍷𝍷	9				
		819				

schneidende Durchmesser ab und nimmt das Mittel aus diesen beiden Messungen als wahren Durchmesser an. Außerdem ist jeder Kluppenführer mit einem Stück Kreide, einem leichten Beilchen oder einem Baumrisser, wie solche zum Auszeichnen des Durchforstungsholzes gebraucht werden, versehen, um die gemessenen Bäume bezeichnen zu können.

Die Resultate der Messung werden in ein Manual eingetragen. Jeder Manualführer kann bequem zwei, sogar drei Kluppenführer beschäftigen. Diese werden in nicht zu weitem Abstande von einander aufgestellt, während der Manualführer ein kurzes Stück hinter denselben seinen Platz einnimmt. Jeder Kluppenführer hält mit der linken Hand den festen Schenkel der Kluppe und öffnet sodann mit der rechten, welche außerdem noch die Kreide oder den Risser hält, den beweglichen Schenkel. Hierauf wird der feste Schenkel der Kluppe in der Höhe der Brustmarke an die eine Seite des Stammes angelegt, der rechte bis zur Berührung an die andere Stammseite angeschoben, und wenn der Kluppenmaßstab die oben erwähnte Einrichtung hat, die letzte vor dem beweglichen Schenkel stehende Ziffer des Maßstabes ausgerufen. Endlich wird der gemessene Stamm auf der Seite, nach welcher sich die Messung hinbewegt, mit der Kreide oder dem Risser bezeichnet. Das von den Kluppenführern ausgerufene Maß wird wohl auch, um Irrungen vorzubeugen, von dem Manualführer laut wiederholt. Auf diese Weise wird ein schmaler Streifen des Bestandes durchschritten. Sind die Arbeiter an der hinteren Seite des Bestandes angekommen, so wenden dieselben um, gehen, die Stämme messend und zeichnend, wieder nach vorn und zerlegen, der Art fortfahrend, den Bestand in lauter schmale Streifen, bis die ganze Fläche desselben durchschritten ist. Wird der Bestand durch Wege, Gräben 2c. in kleinere Abschnitte getheilt, so werden diese sorgfältig als Trennlinien benutzt, weil man innerhalb solcher kleineren Flächen weniger leicht Gefahr läuft, einen Stamm zu übersehen. An Berghängen müssen sich die Arbeiter längs des Hanges bewegen.

Vor dem Beginne des Kluppirens muß der Manualführer den aufzunehmenden Bestand durchgehen, um das Manual zweckmäßig einrichten zu können. Dabei hat derselbe namentlich zu untersuchen, welche Holzarten in dem Bestande vorkommen, ob eine oder mehrere, und welche Stärkestufen am häufigsten auftreten, damit der Raum, welcher für die einzelnen Stärkestufen nöthig ist, ungefähr bemessen werden kann. Die Bezeichnung der einzelnen Stämme im Manuale wird verschieden ausgeführt, theils durch Punkte, theils durch Striche. Die Gewöh-

Muster 2.

(für das Manual, wenn nicht allein Stärkemessungen vorgenommen, sondern auch Höhenklassen unterschieden werden.)

Forstrevier: Tharand.
Forstort: Am S=Berg.
Abtheilung: 15 a.

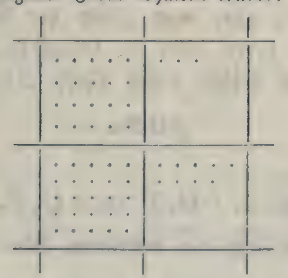
Durchmesser bei 1,5 m über dem Boden. Cent.	Holzart: Fichte. Höhenklasse I.	Stammzahl.	Höhenklasse II.	Stammzahl.	Höhenklasse III.	Stammzahl.	Bemerkungen.
15.	卌 卌 卌 ǀǀǀ	18		.		.	
16.	卌 ǀǀǀǀ	9		.		.	
17.	卌 卌 卌 卌 卌 ǀǀ	27		.		.	
18.	卌 卌 卌 卌 卌 卌 卌 ǀ	36	卌 ǀǀǀǀ	9		.	
19.	卌 卌 卌 卌 卌 卌 卌 ǀ	36	卌 ǀǀǀǀ	9		.	
20.	卌 卌 卌 卌 卌 ǀǀ	27	卌 卌 卌 ǀǀǀ	18		.	
21.	卌 卌 卌 ǀǀǀ	18	卌 卌 卌 ǀǀǀ	18		.	
22.	卌 ǀǀǀǀ	9	卌 卌 卌 卌 卌 卌 卌 卌 卌 卌 ǀǀǀǀ	54		.	
23.	卌 ǀǀǀǀ	9	卌 卌 卌 卌 卌 卌 卌 ǀ	36	卌 卌 卌 ǀǀǀ	18	
24.	卌 卌 卌 ǀǀǀ	18	卌 卌 卌 卌 卌 卌 卌 ǀ	36	卌 卌 卌 卌 卌 ǀǀ	27	
25.	卌 ǀǀǀǀ	9	卌 卌 卌 卌 卌 ǀǀ	27	卌 ǀǀǀǀ	9	
26.	卌 ǀǀǀǀ	9	卌 卌 卌 ǀǀǀ	18	卌 ǀǀǀǀ	9	
27.		.	卌 卌 卌 卌 卌 卌 卌 ǀ	36	卌 卌 卌 卌 卌 卌 卌 卌 卌	45	
28.		.	卌 ǀǀǀǀ	9	卌 ǀǀǀǀ	9	
29.		.	卌 卌 卌 卌 卌 ǀǀ	27	卌 ǀǀǀǀ	9	
30.		.	卌 ǀǀǀǀ	9	卌 卌 卌 ǀǀǀ	18	
31.		.		.	卌 ǀǀǀǀ	9	
32.		.	卌 卌 卌 ǀǀǀ	18	卌 卌 卌 卌 卌 ǀǀ	27	
33.		.	卌 卌 卌 ǀǀǀ	18	卌 ǀǀǀǀ	9	
34.		.	卌 ǀǀǀǀ	9	卌 ǀǀǀǀ	9	
35.		.		.		.	
36.		.		.	卌 ǀǀǀǀ	9	
37.		.		.	卌 ǀǀǀǀ	9	
38.		.	卌 ǀǀǀǀ	9		.	
39.		.		.		.	
40.		.		.		.	
41.		.		.	卌 ǀǀǀǀ	9	
42.		.		.		.	
43.		.		.	卌 ǀǀǀǀ	9	
		225		360		234	

nung ist bei der Wahl dieser Zeichen entscheidend: wir benutzen stets die in den Mustern 1. und 2. gebrauchten.*)

2. In haubaren, gleichmäßig erwachsenen Beständen, in welchen besonders schon seit längerer Zeit ein geregelter Durchforstungsbetrieb stattgefunden hat, werden die einzelnen Baumindividuen in der Höhe nur sehr unerheblich von einander abweichen. In derartigen Beständen wird man daher eine Trennung der Stämme nach Höhenklassen nicht vorzunehmen brauchen. In Beständen jedoch, wo eine solche Trenuung wegen sehr großer Höhenunterschiede der einzelnen (ungleichalterigen) Stämme sich nöthig macht, bietet dennoch die stammweise Aufnahme nicht die große Schwierigkeit dar, welche häufig angenommen wird, sondern erfordert Seiten des Manualführers nur eine etwas gesteigerte Aufmerksamkeit. Man hat nämlich die Bäume solcher Bestände in mehrere (in Muster 2. beispielsweise drei) Höhenklassen zu theilen und in dem Manuale jeder dieser Klassen die nöthigen Spalten zum Eintragen der Durchmesser zuzuweisen. Nachdem nun von dem Kluppenführer der Durchmesser eines Baumes gemessen und ausgerufen worden ist, hat der Manualführer, ehe er diese Durchmesserzahl in das Manual einträgt, noch die Höhenklasse dieses Baumes einzuschätzen, und dann erst den Eintrag des ausgerufenen Durchmessers zu bewirken. Diese Höhenschätzung erfolgt ohne Schwierigkeit, da nicht die absolute Höhe der Stämme, sondern nur die Höhenklasse derselben zu bestimmen ist. In sehr geschlossenen Beständen, wo die Einschätzung der Höhen-

---

*) Baur (Anleitung S. 144) empfiehlt, das Papier des Manuales in Quadrate zu theilen und in jedes dieser Quadrate bis 20 Punkte einzutragen, wodurch man folgende Form erhalten würde:



Wieder Andere brauchen folgende Zeichen für 1 bis 10:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10

In jedem Falle, besonders aber bei Benutzung dieser letzteren Zeichen, thut man wohl, für das Manual Papier zu wählen, welches mit einem Quadratnetze von feinen blauen Linien überzogen ist, da durch dasselbe die Regelmäßigkeit im Schreiben und damit die Ordnung wesentlich erhöht wird.

klassen der ineinander greifenden Baumkronen wegen zuweilen schwierig und dadurch zeitraubend werden kann, wird man sich blos eines Kluppenführers bedienen, um weniger leicht Irrungen ausgesetzt zu sein.

§. 37.

Die Berechnung der Durchmesser der Modellstämme.

1. Wir haben bereits in §. 35. angedeutet, daß zur Berechnung der Bestandesmasse Modellstämme nöthig sind, und zwar entweder ein einziger (mittlerer Modellstamm), wenn man sämmtliche Stämme eines Bestandes in eine Klasse zusammenfaßt, oder mehrere (Klassenmodellstämme), wenn man die Stämme eines Bestandes in mehrere Klassen theilt und für jede derselben einen Modellstamm ermittelt.

Die Berechnung des Durchmessers des mittleren Modellstammes findet, wenn die Höhe aller Stämme eines Bestandes nahe dieselbe ist, auf folgende Weise statt. Seien die Durchmesser der in dem Bestande vorkommenden Stämme D_0, D_1, D_2, ..., die diesen Durchmessern entsprechenden Kreisflächen G_0, G_1, G_2,...., ferner die Formzahlen der Stärkestufen F_0, F_1, F_2, ..., sei endlich die Anzahl der in den einzelnen Stärkestufen vorhandenen Stämme n_0, n_1, n_2, ..., deren Summe $n_0 + n_1 + n_2\, n\, .. = n$ und die gemeinsame Höhe aller Stämme H. Dann ist die Masse des Bestandes gleich der Summe der Massen der einzelnen Stärkestufen, also gleich

$$G_0\, H\, F_0\, n_0 + G_1\, H\, F_1\, n_1 + G_2\, H\, F_2\, n_2 + \ldots$$
$$= (G_0\, F_0\, n_0 + G_1\, F_1\, n_1 + G_2\, F_2\, n_2 + \ldots)\, H.$$

Es kann diese Masse aber auch gleich der Masse von n Stämmen gesetzt werden, deren jeder die Grundfläche g, die Höhe H und die Formzahl F besitzt, deren Masse also gleich

$$gHFn$$

ist. Dann wird

$$gHFn = (G_0\, F_0\, n_0 + G_1\, F_1\, n_1 + G_2\, F_2\, n_2 + \ldots)\, H\,. \quad 1)$$

Hier ist gHF die Masse des mittleren Modellstammes.

Aus Gl. 1) folgt zunächst, da H beiden Seiten gemeinsam ist,

$$gFn = G_0\, F_0\, n_0 + G_1\, F_1\, n_1 + G_2\, F_2\, n_2 + \ldots.$$

Die linke Seite dieser Gleichung enthält noch die beiden Unbekannten g und F; es müssen deshalb, um g berechnen zu können, über F besondere Bestimmungen getroffen werden. Setzen

wir $F_0 = F_1 = F_2 = \ldots$, so wird auch $F = F_0 = F_1 = F_2 = \ldots$, und damit

$$g n = G_0 n_0 + G_1 n_1 + G_2 n_2 + \ldots$$

oder

$$g = \frac{1}{n} (G_0 n_0 + G_1 n_1 + G_2 n_2 + \ldots) \quad . \quad . \quad 2)$$

Wollte man die Formzahlen einander nicht gleich setzen, so könnte man sich auf irgend eine Art für F einen Mittelwerth berechnen, z. B.

$$F = \frac{1}{n} (F_0 n_0 + F_1 n_1 + F_2 n_2 + \ldots)$$

nehmen.

Führt man in Gl. 2) für G_0, G_1, G_2, ... die entsprechenden Werthe $\frac{\pi}{4} D_0^2$, $\frac{\pi}{4} D_1^2$, $\frac{\pi}{4} D_2^2$, ..., und für g den Ausdruck $\frac{\pi}{4} d^2$ ein, so wird

$$d^2 = \frac{1}{n} (D_0^2 n_0 + D_1^2 n_1 + D_2^2 n_2 + \ldots)$$

und

$$d = \sqrt{\frac{1}{n} (D_0^2 n_0 + D_1^2 n_1 + D_2^2 n_2 + \ldots)} \quad . \quad 3)^*)$$

Werden in diese Formel die in Muster 1. enthaltenen Stammzahlen und Stammstärken eingesetzt, so erhält man zur Berechnung des Durchmessers des mittleren Modellstammes die folgende, in Muster 3. tabellarisch angeordnete Rechnung.**) Zu dieser

---

*) Man hat zur Berechnung des Durchmessers des mittleren Modellstammes auch die Formel angewendet

$$d = \frac{1}{n} (D_0 n_0 + D_1 n_1 + D_2 n_2 + \ldots).$$

Die Fehlerhaftigkeit dieser Rechnungsweise liegt auf der Hand, da das Volumen eines Umdrehungskörpers keine Function der ersten Potenz seines Durchmessers, sondern des Quadrates desselben ist.

**) Die Gleichungen 2) und 3) werden auch dann erhalten, wenn man die Höhen und Formzahlen der einzelnen Stärkestufen als verschieden, aber die Producte derselben $H_0 F_0$, $H_1 F_1$, $H_2 F_2$, ... einander als gleich voraussetzt. Diese Producte werden dann sämmtlich einer Constanten c gleich, oder es wird

$$H_0 F_0 = H_1 F_1 = H_2 F_2 = \ldots = c.$$

Aus diesen Gleichungen folgt weiter

$$H_0 : H_1 : H_2 : \ldots = \ldots F_2 : F_1 : F_0,$$

d. h. der mittlere Modellstamm ergiebt, wenn die Stärkestufen ungleiche Höhen und Formzahlen besitzen, die Masse des Bestandes in dem Falle richtig, wenn sich die Höhen der Stärkestufen umgekehrt verhalten wie die Formzahlen.

Aus der Anwendung des mittleren Modellstammes wird aber auch in

Rechnung ist noch zu bemerken, daß man zur Berechnung der „vielfachen Kreisflächen", d. h. zur Bildung des Productes „Kreisfläche mal Stammzahl" besondere Tafeln berechnet hat.*)

Muster 3.

Durchmesser bei 1,5m über dem Boden. Cent. a.	Stammzahl. b.	Kreisfläche. Quadratmeter. c.	Vielfache Kreisfläche. (b c.) Quadratmeter. d.
15	18	0,0177	0,3186
16	9	0201	0,1809
17	27	0227	0,6129
18	45	0254	1,1430
19	45	0284	1,2780
20	45	0314	1,4130
21	36	0346	1,2456
22	63	0380	2,3940
23	63	0415	2,6145
24	81	0452	3,6612
25	45	0491	2,2095
26	36	0531	1,9116
27	81	0573	4,6413
28	18	0616	1,1088
29	36	0661	2,3796
30	27	0707	1,9089
31	9	0755	0,6795
32	45	0804	3,6180
33	27	0855	2,3085
34	18	0908	1,6344
35	.	.	.
36	9	1018	0,9162
37	9	1075	0,9675
38	9	1134	1,0206
39	.	.	.
40	.	.	.
41	9	1320	1,1880
42	.	.	.
43	9	1452	1,3068
	819 = n.		42,6609 = ng.
		Mithin	$g = \frac{42,6609}{819} = 0,0521$ QM.
			$d = 2\sqrt{\frac{0,0521}{\pi}} = 25,8$ Cent.

Der mittlere Modellstamm hat mithin bei 1,5 Meter Höhe über dem Boden einen Durchmesser von 25,8 Cent.

---

dem Falle ein richtiges Resultat für die Bestandesmasse hervorgehen, wenn die Formzahl, oder die Höhe, oder beide zugleich eine gewisse Function der Stärke sind. Ueber die Form dieser Function sind die schönen Untersuchungen G. Heyer's (Ueber die Ermittelung der Masse, des Alters und des Zuwachses der Holzbestände. §§. 2 u. 7 u. Anhang) zu vergleichen.

*) Vergl. I. Bd. 3. Abth. Taf. 13. Uebrigens kann zu diesem Zwecke jede Walzentafel benutzt werden, wenn man darin die Maßzahlen der Länge als Stammzahlen ansieht.

2. Faßt man nicht die sämmtlichen Stämme eines Bestandes zusammen, sondern bildet man Stärkeklassen, indem man z. B. die Stärkestufen D_0 bis D_k, D_{k+1} bis D_p, D_{p+1} bis D_t, u. s. w. in Klassen vereinigt, so hat man, wenn die Höhen der Stärkeklassen mit H', H'', H''', ... bezeichnet werden, für die Inhalte der einzelnen Stärkeklassen der Reihe nach

$$(G_0 F_0 n_0 + G_1 F_1 n_1 + \ldots + G_k F_k n_k) H',$$
$$(G_{k+1} F_{k+1} n_{k+1} + G_{k+2} F_{k+2} n_{k+2} + \ldots + G_p F_p n_p) H'',$$
$$(G_{p+1} F_{p+1} n_{p+1} + G_{p+2} F_{p+2} n_{p+2} + \ldots + G_t F_t n_t) H''',$$
$$\vdots$$

Der Inhalt jeder dieser Klassen wird aber wiederum gleich sein dem Inhalte von bezüglich n', n'', n''', ... Stämmen, mit den Grundflächen g', g'', g''', ... den Höhen H', H'', H''', ... und den Formzahlen F', F'', F''', ... wo $n' = n_0 + n' + n'' + .. + n_k$, $n'' = n_{k+1} + n_{k+2} + .. + n_p$, $n''' = n_{p+1} + n_{p+2} + .. + n_t$, ... so daß

$$g' H' F' n' = (G_0 F_0 n_0 + G_1 F_1 n_1 + \ldots + G_k F_k n_k) H',$$
$$g'' H'' F'' n'' = (G_{k+1} F_{k+1} n_{k+1} + G_{k+2} F_{k+2} n_{k+2} + .. + G_p F_p n_p) H'',$$
$$g''' H''' F''' n''' = (G_{p+1} F_{p+1} n_{p+1} + G_{p+2} F_{p+2} n_{p+2} + .. + G_t F_t n_t) H''',$$
$$\vdots$$

Hier sind $g' H' F'$, $g'' H'' F''$, $g''' H''' F'''$, ... die Inhalte der Klassenmodellstämme.

Für $F_0 = F_1 = .. = F_k$ wird auch $F' = F_0 = F_1 = .. F_k$; ebenso erhält man für $F_{k+1} = F_{k+2} = \ldots = F_p$ auch $F'' = F_{k+1} = F_{k+2} = \ldots F_p$; u. s. w. und damit

$$g' n' = G_0 n_0 + G_1 n_1 + .. G_k n_k,$$
$$g'' n'' = G_{k+1} n_{k+1} + G_{k+2} n_{k+2} + .. + G_p n_p,$$
$$g''' n''' = G_{p+1} n_{p+1} + G_{p+2} n_{p+2} + .. + G_t n_t,$$
$$\vdots$$

Die Division mit n', n'', n''', ... ergiebt die Kreisflächen der Klassenmodellstämme zu

$$\left.\begin{aligned} g' &= \frac{1}{n'} \left(G_0 n_0 + G_1 n_1 + \ldots + G_k n_k\right), \\ g'' &= \frac{1}{n''} \left(G_{k+1} n_{k+1} + G_{k+2} n_{k+2} + \ldots + G_p n_p\right), \\ g''' &= \frac{1}{n'''} \left(G_{p+1} n_{p+1} + G_{p+2} n_{p+2} + \ldots + G_t n_t\right), \end{aligned}\right\} \quad 4)$$
$$\vdots$$

Muster 4.

Stärke-klasse.	Durchmesser bei 1,5m über dem Boden. Cent. a.	Stamm-zahl. b.	Kreis-fläche. Quadrat-meter. c.	Vielfache Kreisfläche. (bc.) Quadratmeter. d.
I.	15	18	0,0177	0,3186
	16	9	0201	0,1809
	17	27	0227	0,6129
	18	45	0254	1,1430
	19	45	0284	1,2780
	20	45	0314	1,4130
		189 = n'.	Mithin	4,9464 = g' n'. $g' = \frac{4,9464}{189} = 0,0262$ QM. d' = 18,3 Cent.
II.	21	36	0,0346	1,2456
	22	63	0380	2,3940
	23	63	0415	2,6145
	24	81	0452	3,6612
	25	45	0491	2,2095
		288 = n''.	Mithin	12,1248 = g'' n''. $g'' = \frac{12,1248}{288} = 0,0421$ QM. d'' = 23,1 Cent.
III.	26	36	0,0531	1,9116
	27	81	0573	4,6413
	28	18	0616	1,1088
	29	36	0661	2,3796
	30	27	0707	1,9089
		198 = n'''.	Mithin	11,9502 = g''' n'''. $g''' = \frac{11,9502}{198} = 0,0604$ QM. d''' = 27,7 Cent.
IV.	31	9	0,0755	0,6795
	32	45	0804	3,6180
	33	27	0855	2,3085
	34	18	0908	1,6344
	35	.	.	.
		99 = n^{IV}.	Mithin	8,2040 = $g^{IV} n^{IV}$. $g^{IV} = \frac{8,2404}{99} = 0,0832$ QM. d^{IV} = 32,5 Cent.
V.	36	9	0,1018	0,9162
	37	9	1075	0,9675
	38	9	1134	1,0206
	39	.	.	.
	40	.	.	.
	41	9	1320	1,1880
	42	.	.	.
	43	9	1452	1,3068
		45 = n^{V}.	Mithin	5,3991 = $g^{V} n^{V}$. $g^{V} = \frac{5,3991}{45} = 0,1200$ QM. d^{V} = 39,1 Cent.

Setzt man für die Kreisflächen die entsprechenden Durchmesser ein, so erhält man noch

$$\left.\begin{aligned} d' &= \sqrt{\frac{1}{n'}\left(D_0^2\, n_0 + D_1^2\, n_1 + \ldots + D_k^2\, n_k\right)} \\ d'' &= \sqrt{\frac{1}{n''}\left(D_{k+1}^2\, n_{k+1} + D_{k+2}^2\, n_{k+2} + \ldots + D_p^2 n_p\right)} \\ d''' &= \sqrt{\frac{1}{n'''}\left(D_{p+1}^2\, n_{p+1} + D_{p+2}^2\, n_{p+2} + \ldots + D_t^2 n_t\right)} \\ &\;\vdots \end{aligned}\right\} \quad 5)$$

Werden diese Formeln auf die Zahlen des Musters 1. angewendet und aus letzteren beispielsweise fünf Stärkeklassen, welche die Stärkestufen 15 — 20, 21 — 25, 26 — 30, 31 — 35, 36—43 Cent umfassen, gebildet, so erhält man die im Muster 4. dargestellte Rechnung.

3. Hat man in einem Bestande Höhenklassen ausgeschieden, so kann man entweder a) jede dieser Höhenklassen als Bestand für sich betrachten und deren mittleren Modellstamm berechnen; oder b) die innerhalb jeder Höhenklass e vorkommenden Stärkestufen wieder in Stärkeklassen zusammenfassen; oder endlich c) einen mittleren Modellstamm für den ganzen Bestand bestimmen, von welchem man aber nicht nur den Durchmesser, sondern auch die Höhe berechnen muß.

a. Wird jede der Höhenklassen für sich betrachtet, so ergiebt die in Muster 5. dargestellte Rechnung das in diesem Falle zur Berechnung des mittleren Modellstammes jeder Klasse einzuhaltende Verfahren.

Muster 5.

I. Höhenklasse,

die Stämme von 14—20 Meter umfassend. Mittlere Höhe 18 Meter.

Durchmesser bei 1,5m über dem Boden. Cent. a.	Stammzahl. b.	Kreisfläche. Quadratmeter. c.	Vielfache Kreisfläche. (b c.) Quadratmeter. d.
15	18	0,0177	0,3186
16	9	0201	0,1809
17	27	0227	0,6129
18	36	0254	0,9144
19	36	0284	1,0224
20	27	0314	0,8478
21	18	0346	0,6228
22	9	0380	0,3420
23	9	0415	0,3735
24	18	0452	0,8136
25	9	0491	0,4419
26	9	0531	0,4779
	225 $= n'$.		6,9687 $= g'n'$.
		Mithin	$g' = \frac{6,9687}{225} = 0,0310$ QM. $d' = 19,9$ Cent.

II. Höhenklasse,

die Stämme von 21—25 Meter umfassend. Mittlere Höhe 23 Meter.

Durchmesser bei $1{,}5^m$ über dem Boden. Cent. a.	Stammzahl. b.	Kreisfläche. Quadratmeter. c.	Vielfache Kreisfläche. (b c.) Quadratmeter. d.
18	9	0,0254	0,2286
19	9	0284	0,2556
20	18	0314	0,5652
21	18	0346	0,6228
22	54	0380	2,0520
23	36	0415	1,4940
24	36	0452	1,6272
25	27	0491	1,3257
26	18	0531	0,9558
27	36	0573	2,0628
28	9	0616	0,5544
29	27	0661	1,7847
30	9	0707	0,6363
31	.	.	.
32	18	0804	1,4472
33	18	0855	1,5390
34	9	0908	0,8172
35	.	.	.
36	.	.	.
37	.	.	.
38	9	1134	1,0206
	360 $= n''$.		18,9891 $= g''n''$.

Mithin $g'' = \frac{18{,}9891}{360} = 0{,}0527$ QM.

$d'' = 25{,}9$ Cent.

III. Höhenklasse,

die Stämme von 26—33 Meter umfassend. Mittlere Höhe 28 Meter.

Durchmesser bei $1{,}5^m$ über dem Boden. Cent. a.	Stammzahl. b.	Kreisfläche. Quadratmeter. c.	Vielfache Kreisfläche. (b c.) Quadratmeter. d.
23	18	0,0415	0,7470
24	27	0452	1,2204
25	9	0491	0,4419
26	9	0531	0,4779
27	45	0573	2,5785
28	9	0616	0,5544
29	9	0661	0,5949
30	18	0707	1,2726
31	9	0755	0,6795
32	27	0804	2,1708
33	9	0855	0,7695
34	9	0908	0,8172
35	.	.	.
36	9	1018	0,9162
37	9	1075	0,9675
38	.	.	.
39	.	.	.
40	.	.	.
41	9	1320	1,1880
42	.	.	.
43	9	1452	1,3068
	234 $= n'''$.		16,7031 $= g'''n'''$.

Mithin $g''' = \frac{16{,}7031}{234} = 0{,}0714$ QM.

$d''' = 30{,}1$ Cent.

b. Wollte man innerhalb dieser Höhenklassen noch Stärkeklassen unterscheiden, so würde die Rechnung für jede Höhenklasse nach Muster 4. zu führen sein. Eine Schwierigkeit würde diese Rechnung übrigens nicht bieten.

c. Will man bei sehr abweichenden Höhen und dadurch bedingter Bildung von Höhenklassen nicht jede dieser letzteren für sich betrachten, d. h. nicht für jede derselben einen besonderen mittleren Modellstamm berechnen, sondern nur einen mittleren Modellstamm für den ganzen Bestand bestimmen, so kommt es noch darauf an, außer dem Durchmesser die Höhe dieses mittleren Modellstammes zu finden.

Seien die Höhen der einzelnen Höhenklassen H_0, H_1, H_2, ... und nehmen wir ferner an, daß die in diesen Höhenklassen vorkommenden Stärkestufen D_0, D_1, D_2 ... der Zahl nach durch die Zahlen n_0', n_1', n_2', ...; n_0'', n_1'', n_2'', ...; u. s. w. ausgedrückt seien, wo natürlich einzelne dieser Zahlen gleich Null sein werden, so hat man die Bestandesmasse einmal gleich

$$(G_0 F_0' n_0' + G_1 F_1' n_1' + G_2 F_2' n_2' + ..) H_0 + (G_0 F_0'' n_0'' + G_1 F_1'' n_1'' + G_2 F_2'' n_2'' + ..) H_1 + ...$$

das andere Mal gleich

$$g H F n,$$

wo

$$n = n_0' + n_1' + ... + n_0'' + n_1'' + ...,$$

so daß

$$g H F n = (G_0 F_0' n_0' + G_1 F_1' n_1' + ..) H_0 + (G_0 F_0'' n_0'' + G_1 F_1'' n_1'' + ..) H_1 + ...$$

In dieser Gleichung sind g, F und H unbekannt, es müssen deshalb zur Lösung derselben weitere Bedingungen aufgesucht oder über zwei der Größen g, H, F besondere Voraussetzungen gemacht werden. Setzt man vorerst $F = F_0' = F_1' = ...$, $H = H_0 = H_1 = ...$, so hat man für gn die Gleichung

$$g n = G_0 n_0' + G_1 n_1' + ... + G_0 n_0'' + G_1 n_1'' + ...$$

oder

$$g = \frac{1}{n}\left(G_0 n_0' + G_1 n_1' + .. + G_0 n_0'' + G_1 n_1'' + ...\right). \quad 6)$$

und

$$d = \sqrt{\frac{1}{n}\left(D_0^2 n_0' + D_1^2 n_1' + .. + D_0^2 n_0'' + D_1^2 n_1'' + ...\right)} \quad 7)^{*})$$

Um nun noch H zu erhalten, müssen wir entweder

*) Die Gleichungen 6) und 7) sind natürlich identisch mit 2) und 3), da $n_0' + n_0'' + .. = n_0$, $n_1' + n_1'' + ... = n_1, ...$

$F_0' = F_1' = \ldots = F_0'' = F_1'' = \ldots = F$ setzen, oder für F einen Mittelwerth aus $F_0', F_1' \ldots$ bestimmen. Im ersteren Falle erhält man

$$H = \frac{1}{gn}\left[(G_0 n_0' + G_1 n_1' + ..)H_0 + (G_0 n_0'' + G_1 n_1'' + ..)H_1 + ..\right]$$

im zweiten

$$H = \frac{1}{gnF}\Big[(G_0\, n_0'\, F_0' + G_1\, n_1'\, F_1' + \ldots)\, H_0 + (G_0\, n_0'' + G_1\, n_1'' + \ldots)\, H_1 + \ldots\Big]$$

In Anwendung auf unser Beispiel würden wir für den Fall, daß wir $F_0' = F_1' = .. = F_0'' = F_1'' = \ldots = F$ setzten, folgendes Rechnungswerk erhalten. Es ist zuerst

$$gn = G_0\, n_0' + G_1\, n_1' + .. + G_0\, n_0'' + G_1\, n_1'' + .. = 42{,}6609 \text{ Quadratmeter};$$

ferner

$$(G_0\, n_0' + G_1\, n_1' + G_2\, n_2' + ..)\, H_0 = 6{,}9687.18 = 125{,}4366 \text{ Cubicmeter},$$

$$(G_0\, n_0'' + G_1\, n_1'' + G_2\, n_2'' + ..)\, H_1 = 18{,}9891.23 = 436{,}7493 \text{ Cubicmeter},$$

$$(G_0\, n_0''' + G_1\, n_1''' + G_2\, n_2''' + \ldots)\, H_2 = 16{,}7031.28 = 467{,}6868 \text{ Cubicmeter},$$

Summe = 1029,8727 Cubicmeter.

Somit

$$H = \frac{1029{,}8727}{42{,}6609} = 24{,}1 \text{ Meter},$$

d. h. der mittlere Modellstamm muß einen Durchmesser von 25,8 Cent und eine Länge von 24,1 Meter haben.

§. 38.

Auswahl der Modellstämme und Berechnung des Holzgehaltes derselben.

1. Auswahl der Modellstämme. Die Auswahl der Modellstämme hat mit großer Vorsicht zu geschehen. Nicht nur müssen dieselben wo möglich genau den berechneten Durchmesser haben, und in der Höhe, wo derselbe gemessen wird, nahezu kreisförmig sein, sie dürfen auch keine Gabel- und andere Mißbildungen zeigen. Auch in der Höhe müssen sie dem mittleren Charakter des Bestandes oder der Stärkeklasse entsprechen; ihre Länge darf daher ebenso wenig viel unter die mittlere Länge des Bestandes oder der Stärkeklasse herabsinken, als dieselbe sehr bedeutend überragen. Ebenso ist darauf zu sehen, daß die Beastung des Modell-

stammes der Beastung des Bestandes oder der Klasse entspricht. Aus diesem Grunde und weil deren Schäfte in Brusthöhe meist elliptische Querflächen zeigen, sind Randbäume als Modellstämme durchaus zu verwerfen. Die Zahl der auszuwählenden Modellstämme läßt sich im Allgemeinen nicht begrenzen: je mehr derselben man fällt und berechnet, um so genauer wird man die Bestandesmasse erhalten.

Es kann sich ereignen, daß man Stämme von dem berechneten Durchmesser in dem aufzunehmenden Bestande überhaupt gar nicht, oder wenigstens in zu geringer Zahl findet. Um sich in diesem Falle Modellstämme zu verschaffen, kann man folgenden Weg einschlagen. Ist D der berechnete Durchmesser des Modellstammes, D_1 ein diesem berechneten Durchmesser sehr nahe kommender, welcher einem Stamme des aufzunehmenden Bestandes angehört, der übrigens den für einen Modellstamm gestellten Bedingungen entspricht, und bezeichnet V den Holzgehalt des ersten, V_1 den des zweiten Stammes, so werden Höhe und Formzahl dieser beiden Stämme, da die Durchmesser derselben nur wenig verschieden sind, als gleich angenommen werden können. Die Proportion

$$V : V_1 = \frac{\pi}{4} D^2 H F : \frac{\pi}{4} D_1{}^2 H_1 F_1$$

geht dann über in

$$V : V_1 = D^2 : D_1{}^2,$$

und es wird

$$V = V_1 \frac{D^2}{D_1{}^2}$$

oder auch

$$V = V_1 \frac{G}{G_1}.$$

Hätte man z. B. D = 20,0 Cent, D_1 = 20,2 Cent, V_1 = 0,2796 Cubicmeter, so wäre

$$V = 0{,}2796 \frac{400{,}00}{408{,}04} = 0{,}2741 \text{ Cubicmeter.}$$

Man kann auch zwei Hülfsstämme von der Beschaffenheit auswählen, daß sich deren Kreisflächen zur Kreisfläche des gesuchten Stammes ergänzen, d. h. daß wenn man D als berechneten, D_1 und D_2 als gemessene Durchmesser hat, die Relation

$$D^2 = \frac{1}{2} (D_1{}^2 + D_2{}^2)$$

oder die gleichwerthige

$$G = \frac{1}{2} (G_1 + G_2)$$

stattfindet.

Wäre z. B. D = 20,0 Cent oder G = 0,0314 □M., so könnte man D_1 = 19,8 Cent, G_1 = 0,0308 □M. und D_2 = 20,2 Cent, G_2 = 0,0320 □M. wählen, denn es ist

$$\frac{1}{2} (0,0308 + 0,0320) = 0,0314 \text{ □M.}$$

Bei dem in §. 37c. dargestellten Falle wird es vorkommen können, daß man keinen Stamm von der berechneten mittleren Höhe findet. Dann muß für einen solchen der Cubicinhalt gleichfalls interpolirt werden. Es ist aber, weil der gesuchte und der gemessene Stamm in den Durchmessern übereinstimmen,

$$V : V_1 = \frac{\pi}{4} D^2 H F : \frac{\pi}{4} D^2 H_1 F_1.$$

Da man auch die Formzahlen beider Stämme als nahe gleich wird voraussetzen dürfen, so wird

$$V : V_1 = H : H_1$$

und daraus

$$V = V_1 \frac{H}{H_1}.$$

2. Die Berechnung des Holzgehaltes der Modellstämme. Zur Berechnung des Holzgehaltes der Modellstämme wird man sich einer der in §. 15. gegebenen Cubirungsformeln bedienen. Bei der Erhebung der für diese Formeln nöthigen Rechnungselemente muß mit möglichster Schärfe verfahren werden. Man zerlegt dazu den Stamm in sehr kurze Sectionen, denen man nach §. 16. eine Länge von höchstens 2 Meter giebt, mißt die Durchmesser dieser Sectionen wenigstens in zwei aufeinander senkrecht stehenden Richtungen bis auf Millimeter und nimmt das Mittel aus diesen Ablesungen als wahren Durchmesser an. Die Astmasse wird durch Aichung oder durch hydrostatische Wägung bestimmt; bei sehr großen Mengen kann man dieselbe nach ihrem Inhalte auch durch einfache Wägung finden, indem man nur von einem kleinen Theile den Holzgehalt durch Aichung oder auf hydrostatischem Wege berechnet. Bei den meisten Bestandesaufnahmen wird es möglich sein, die Modellstämme zu fällen und die Messung der Durchmesser und Länge derselben im Liegen vorzunehmen. Bei Betriebsregulirungen z. B. wird diese Fällung immer vorgenommen werden können. Es sind jedoch auch Fälle denkbar, z. B. bei Waldkäufen 2c., wo man Modellstämme nur in beschränktem Maße oder gar nicht fällen darf. Dann muß die Holzgehaltbestimmung derselben entweder durch sectionsweise Cubirung geschehen, indem man die hierzu nöthigen Durchmesser und Längen mit Breymann's forstlichem

Universalinstrumente mißt, oder nach Preßler's Richthöhenmethode. In beiden Fällen wird man aber eine möglichst große Anzahl von Modellstämmen auswählen, damit die bei der Cubirung nach diesen Methoden unterlaufenden Fehler sich compensiren können.

Man kann den Inhalt des mittleren Modellstammes oder der Klassenmodellstämme oder selbst eines Stammes jeder Stärkenstufe aber auch durch sogenannte Stamm- oder Baummassentafeln*) finden. Es sind dies Tafeln, welche den Inhalt stehender Stämme (mit oder ohne Astholz) unmittelbar in Cubicmetern angeben, wenn der Durchmesser, die Höhe und das Alter dieser Stämme gegeben sind. Sie beruhen auf der Voraussetzung, daß Stämme, welche in diesen drei Factoren übereinstimmen, gleichen Inhalt besitzen müssen, und innerhalb gewisser Grenzen ist diese Annahme sicher auch richtig. Da aber die Zahlen solcher Tafeln die Mittel aus den Massengehalten einer sehr großen Anzahl von Einzelstämmen sind, so werden

*) Die umfänglichsten Tafeln dieser Art sind von der bayerischen Forstverwaltung construirt worden. Sie sind veröffentlicht unter dem Titel „Massentafeln zur Bestimmung des Inhaltes der vorzüglichsten teutschen Waldbäume aus dem Durchmesser auf Brusthöhe und der ganzen Länge. Bearbeitet im Forsteinrichtungsbureau des königl. bayer. Finanzministeriums. München, 1846. J. Palm's Hofbuchhandlung. Fol. 50 S. In preußisches Maß wurden dieselben von Stahl übertragen (Massentafeln. 1852.); Umrechnungen in österreichisches Maß besitzen wir von Buschek (Verhandlungen der Forstsection für Mähren und Schlesien. 1855. 2. H.) und Breymann (Holzmeßkunst. 1868.); in metrisches Maß von Nördlinger (Krit. Bl. 49. Bd. 1. u. 2. H. u. 50. Bd. 1. H.) und H. Behm (Massentafeln zur Bestimmung des Gehaltes stehender Bäume in Cubicmetern fester Holzmasse. Berlin, 1872. Verlag von Gustav Lange. 8. 47 S.) Die bayerischen Tafeln beruhen auf der Cubirung von 40220 Stämmen, und zwar von 21780 Fichten, 4500 Tannen, 4280 Kiefern, 590 Lärchen, 3710 Buchen, 2490 Eichen, 2870 Birken Die Stämme wurden dazu in Sectionen von höchstens 10 bayer. Fuß getheilt, die Durchmesser bis auf Zehntel-Zolle genau gemessen, und die Maßzahlen in die Inhaltsformel

$$V = \frac{1}{2}\left[G_0 + G_n + 2\,(G_1 + G_2 + \ldots + G_{n-1})\right] h$$

eingesetzt. Sodann wurde die Formzahl, bezogen auf den Durchmesser, bei 1,3 Meter Höhe über dem Boden, berechnet. Die Formzahlen der in Brusthöhendurchmesser, Länge und Alter übereinstimmenden Stämme vereinigte man hierauf in Mittel, wobei man die Durchmesser von Zoll zu Zoll, die Höhen von 10 zu 10 Fuß, die Alter von 30 zu 30 Jahren abstufte. Diese Mittel wurden meistens graphisch ausgeglichen.

Besonders zu tadeln ist an den bayerischen Tafeln der große Altersabstand der zu einer Klasse vereinigten Stämme, da mit dem Alter eine sehr wesentliche Aenderung der Formzahlen erfolgt; dieselben müssen in dieser Beziehung wesentlich verfeinert werden, ehe sie zur Berechnung des Holzgehaltes der Modellstämme dienen können.

die mit diesen Tafeln berechneten Modellstämme die Holzmasse der Bestände um so genauer angeben, je ausgedehnter diese Bestände sind, denn man darf dann voraussetzen, daß auch die in diesen Beständen vorkommenden Baumformen möglichst abweichend sein werden.

§. 39.

Die Berechnung des Holzgehaltes der Bestände.

1. Nachdem die Auswahl und Cubirung der Modellstämme erfolgt ist, kann zur Berechnung des Holzgehaltes der Bestände geschritten werden.

a. Ist nur ein mittlerer Modellstamm ausgewählt worden, so ist, wenn die noch unbekannte Masse des Bestandes mit **M**, die Masse des Modellstammes mit m bezeichnet wird, wie wir in §. 37. 1. gesehen haben,

$$M = gHFn.$$

Andererseits aber ist

$$m = gHF,$$

mithin auch

$$M = mn \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 1)$$

d. h. die Bestandesmasse ist gleich dem Producte aus der Masse des mittleren Modellstammes in die Stammzahl des Bestandes.

Es ist aber auch die Gleichung

$$M = GHF$$

gültig, in welcher G die Kreisflächensumme des Bestandes bedeutet. Aus

$$m = gHF$$

folgt

$$HF = \frac{m}{g}$$

und damit

$$M = \frac{G}{g} m, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 2)$$

d. h. die Bestandesmasse wird gefunden, wenn man die Masse des mittleren Modellstammes mit dem Quotienten multiplicirt, welcher sich ergiebt, wenn man die Maßzahl der Stammgrundfläche des Bestandes durch die Maßzahl der Stammgrundfläche des Modellstammes dividirt.

Die Gleichung 2) läßt sich noch in die leicht in Worte zu übertragende Proportion auflösen

$$M : m = G : g,$$

während sie in Verbindung mit 1) die Relation

$$\frac{G}{g} = n$$

ergiebt, aus welcher die Stammzahl gefunden werden kann, wenn G und g gegeben sind.

Für unser Beispiel ist G = 42,6609, g = 0,0521 Quadratmeter, der Cubicinhalt des Modellstammes möge 0,6009 Cubicmeter, und zwar 0,4995 Cubicmeter Derbholz und 0,1014 Cubicmeter Reißig betragen. Dann hätte man als

Gesammtholzmasse $\frac{42,6609}{0,0521} \cdot 0,6009 = 492,00$ Cubicmeter,

Derbholzmasse $\frac{42,6609}{0,0521} \cdot 0,4995 = 408,98$ „

Reißigmasse $\frac{42,6609}{0,0521} \cdot 0,1014 = 83,02$ „

Das Derbholz kann man noch in Nutzholz, Scheitholz und Klöppelholz trennen und für diese Trennung gleichfalls die am Modellstamme gewonnenen Erfahrungen benutzen. Meistens wird es aber zweckmäßiger sein, zur Ermittelung der einzelnen Sortimente die bei früheren größeren Fällungen erhaltenen Verhältnißzahlen zu brauchen.

b. Sind Stärkeklassen gebildet worden, und heißen M_0, M_1, $M_2, \ldots$ die gesuchten Massen der Stärkeklassen, m_0, m_1, $m_2, \ldots$ die Massen der Klassenmodellstämme, so erhält man analog a.

$$M_0 = m_0\, n_0, \quad M_1 = m_1\, n_1, \quad M_2 = m_2\, n_2, \ldots$$

oder auch

$$M_0 = \frac{G_0}{g_0} m_0, \quad M_1 = \frac{G_1}{g_1} m_1, \quad M_2 = \frac{G_2}{g_2} m_2, \ldots$$

und daraus die Bestandesmasse

$$M = M_0 + M_1 + M_2 + \ldots = m_0\, n_0 + m_1\, n_1 + m_2\, n_2 \ldots \qquad 2)$$

und

$$M = M_0 + M_1 + M_2 + \ldots = \frac{G_0}{g_0} m_0 + \frac{G_1}{g_1} m_1 + \frac{G_2}{g_2} m_2 + \ldots \qquad 3)$$

c. Ausdrücke von derselben Form wie Gl. 2) erhält man bei Bildung von Höhenklassen und Höhen- und Stärkeklassen.

2. Die Rechnung führt man in allen Fällen am besten tabellarisch. Wir wollen dieselbe wenigstens für einige Fälle durchführen.

a. Ein mittlerer Modellstamm.

Muster 6.

Durchmesser des mittleren Modellstammes = 25,8 Cent.
Kreisfläche (g) " " " = 0,0521 □M.
Kreisflächensumme (G) des Bestandes . . . = 42,6609 "

$n = \frac{G}{g}$ . . . . = 819.

Ordnungs-nummer.	Des Modellstammes Holzgehalt in Cubicmetern an Derbholz.					
	Nutzholz.	Scheitholz.	Klöppel-holz.	Summe.	Reißig.	Summe.
1	0,3304	0,1070	0,0621	0,4995	0,1014	0,6009
2	0,3162	0,1282	0,0438	0,4882	0,2688	0,7570
3	0,3802	0,1503	0,0504	0,5809	0,0609	0,6418
4	0,3849	0,1234	0,0632	0,5715	0,0784	0,6499
5	0,5018	0,1424	0,0407	0,6849	0,0858	0,7707
6	0,4832	0,1021	0,0645	0,6498	0,0942	0,7440
Summe:	2,3967	0,7534	0,3247	3,4748	0,6895	4,1643
Mittel:	$0{,}3994_5$	$0{,}1255_7$	$0{,}0541_2$	$0{,}5791_3$	$0{,}1149_2$	$0{,}6940_5$
Daher Bestandes-masse:	327,15	102,84	44,32	474,31	94,12	568,43

b. Stärkenklassenmodellstämme.

Muster 7.

I. Stärkenklasse 15 — 20 Cent.

Durchmesser des Modellstammes . . . . = 18,3 Cent.
Kreisfläche (g_0) " " . . . . = 0,0262 □M.
Kreisflächensumme (G_0) der Klasse . . . . = 4,9464 "

$n_0 = \frac{G_0}{g_0}$ . . . . = 189.

Ordnungs-nummer.	Des Modellstammes Holzgehalt in Cubicmetern an Derbholz.					
	Nutzholz.	Scheitholz.	Klöppel-holz.	Summe.	Reißig.	Summe.
1	.	.	.	0,2122	0,0687	0,2809
2	.	.	.	0,2361	0,0735	0,3096
Summe:	.	.	.	0,4483	0,1422	0,5905
Mittel:	.	.	.	$0{,}2241_5$	0,0711	$0{,}2952_5$
Daher Masse der Klasse I.:	.	.	.	42,36	13,44	55,80

II. Stärkenklasse 21—25 Cent.

Durchmesser des Modellstammes = 23,1 Cent.
Kreisfläche (g_1) " " = 0,0421 QM.
Kreisflächensumme (G_1) der Klasse = 12,1248 "
$n_1 = \frac{G_1}{g_1}$ . . . . = 288.

Ordnungsnummer.	Des Modellstammes Holzgehalt in Cubicmetern an Derbholz Nutzholz.	Scheitholz.	Klöppelholz.	Summe.	Reißig.	Summe.
1	.	.	.	0,3988	0,0889	0,4877
2	.	.	.	0,5244	0,0538	0,5782
3	.	.	.	0,5120	0,0458	0,5578
Summe:	.	.	.	1,4352	0,1885	1,6237
Mittel:	.	.	.	0,4784	$0,0628_3$	$0,5412_3$
Daher Masse der Klasse II.:	.	.	.	137,78	18,09	155,87

III. Stärkenklasse 26—30 Cent.

Durchmesser des Modellstammes = 27,7 Cent.
Kreisfläche (g_2) " " = 0,0604 QM.
Kreisflächensumme (G_2) der Klasse = 11,9502 "
$n_2 = \frac{G_2}{g_2}$ . . . . = 198.

1	.	.	.	0,6819	0,1111	0,7930
2	.	.	.	0,7456	0,1074	0,8530
3	.	.	.	0,5959	0,1500	0,7459
Summe:	.	.	.	2,0234	0,3685	2,3919
Mittel:	.	.	.	$0,6744_7$	$0,1228_3$	0,7973
Daher Masse der Kl. III.:	.	.	.	133,55	24,32	157,87

IV. Stärkenklasse 31—35 Cent.

Durchmesser des Modellstammes = 32,5 Cent.
Kreisfläche (g_3) " " = 0,0832 QM.
Kreisflächensumme (G_3) der Klasse = 8,2404 "
$n_3 = \frac{G_3}{g_3}$ . . . . = 99.

1	.	.	.	1,2403	0,2043	1,4446
2	.	.	.	0,9001	0,1085	1,0086
Summe:	.	.	.	2,1404	0,3128	2,4532
Mittel:	.	.	.	1,0702	0,1564	1,2266
Daher Masse der Kl. IV.:	.	.	.	105,96	15,47	121,43

V. Stärkenklasse 36—43 Cent.

Durchmesser des Modellstammes = 39,1 Cent.
Kreisfläche (g_4) „ „ = 0,1200 □M.
Kreisflächensumme (G_4) der Klasse = 5,3991 „
$n_4 = \frac{G_4}{g_4}$ . . . . = 45.

Ordnungsnummer.	Des Modellstammes Holzgehalt in Cubicmetern an Derbholz. Nutzholz.	Scheitholz.	Klöppelholz.	Summe.	Reißig.	Summe.
1	.	.	.	1,0839	0,2235	1,3074
2	.	.	.	1,6425	0,3344	1,9769
Summe:	.	.	.	2,7264	0,5579	3,2843
Mittel:	.	.	.	1,3632	$0,2789_5$	$1,6421_5$
Daher Masse der Klasse V.:	.	.	.	61,35	12,55	73,90
Wiederholung.						
Masse der Klasse I.:	.	.	.	42,36	13,44	55,80
„ II.:	.	.	.	137,78	18,09	155,87
„ III.:	.	.	.	133,55	24,32	157,87
„ IV.:	.	.	.	105,96	15,47	121,43
„ V.:	.	.	.	61,35	12,55	73,90
Bestandesmasse:	.	.	.	481,00	83,87	564,87

c. Höhenklassenmodellstämme.

Muster 8.

I. Höhenklasse. Mittlere Höhe 18 Meter.

Durchmesser des Modellstammes = 19,9 Cent.
Kreisfläche (g_0) „ „ = 0,0310 □M.
Kreisflächensumme (G_0) der Klasse = 6,9687 „
$n_0 = \frac{G_0}{g_0}$ . . . . = 225.

Ordnungsnummer.	Des Modellstammes Holzgehalt in Cubicmetern an Derbholz. Nutzholz.	Scheitholz.	Klöppelholz.	Summe.	Reißig.	Summe.
1	.	.	.	0,2451	0,0394	0,2845
2	.	.	.	0,2658	0,0607	0,3265
3	.	.	.	0,2518	0,0873	0,3391
Summe:	.	.	.	0,7627	0,1874	0,9501
Mittel:	.	.	.	$0,2542_3$	$0,0624_7$	0,3167
Daher Masse der Klasse I.:	.	.	.	57,20	14,06	71,26

II. Höhenklasse. Mittlere Höhe 23 Meter.

Durchmesser des Modellstammes = 25,9 Cent.
Kreisfläche (g_1) „ „ = 0,0527 □M.
Kreisflächensumme (G_1) der Klasse = 18,9891 „

$n_1 = \frac{G_1}{g_1}$ . . . . = 360.

Ordnungs-nummer.	Des Modellstammes Holzgehalt in Cubicmetern an Derbholz. Nutzholz.	Scheitholz.	Klöppel-holz.	Summe.	Reißig.	Summe.
1	.	.	.	0,5095	0,0994	0,6089
2	.	.	.	0,5924	0,0621	0,6545
3	.	.	.	0,5760	0,0791	0,6551
Summe:	.	.	.	1,6779	0,2406	1,9185
Mittel:	.	.	.	0,5593	0,0802	0,6395
Daher Masse der Klasse II.:	.	.	.	201,35	28,87	230,22

III. Höhenklasse. Mittlere Höhe 28 Meter.

Durchmesser des Modellstammes = 30,1 Cent.
Kreisfläche (g_2) „ „ = 0,0714 □M.
Kreisflächensumme (G_2) der Klasse = 16,7031 „

$n_2 = \frac{G_2}{g_2}$ . . . . = 234.

1	.	.	.	0,8861	0,1841	1,0702
2	.	.	.	0,8857	0,1854	1.0711
3	.	.	.	0,9018	0,1600	1,0618
Summe:	.	.	.	2,6736	0,5295	3,2031
Mittel:	.	.	.	0,8912	0,1765	1,0677
Daher Masse der Kl. III.:	.	.	.	208,54	41,30	249,84

Wiederholung.

Masse der Klasse I.:	.	.	.	57,20	14,06	71,26
„ II.:	.	.	.	201,35	28,87	230,22
„ III.:	.	.	.	208,54	41,30	249,84
Bestandes-masse:	.	.	.	467,09	84,23	551,32

d. Wie schon oben erwähnt, kann man die Berechnung der Modellstämme auch mit Hülfe von Stamm- oder Baummassentafeln ausführen. Man kann bei Benutzung solcher Tafeln aber auch die Bildung der Stärkeklassen und die Berechnung der Durchmesser der Modellstämme ganz ersparen, indem man die Stämme eines Bestandes nur nach Höhenklassen trennt. Von Letzteren berechnet man jedoch nicht die mittleren Modellstämme und deren Inhalt, sondern entnimmt unmittelbar die Inhalte der in den Höhenklassen enthaltenen Stärkestufen den Massentafeln und vervielfacht diese Inhalte mit den Stammzahlen der vorkommenden Stärkestufen.

Wir wollen als Beispiel hierzu die in Muster 5. gegebenen Zahlen mit Hülfe von Behm's Tafeln (s. o. S. 181) berechnen, dabei die Inhalte derjenigen Stämme, deren Durchmesser ungerade Zahlen sind, interpoliren (durch Halbirung der Differenzen der Inhalte) und voraussetzen, daß die Durchmesser bei 1,5 Meter über dem Boden mit denjenigen bei 1,3 Meter über dem Boden übereinstimmen. Die Tafel für haubare Fichten*) ergiebt dann für die in Muster 5. gebildeten drei Höhenklassen folgende Schaftinhalte**)

Muster 9.

I. Höhenklasse. Mittlere Höhe 18 Meter.

Durchmesser bei 1,5m über dem Boden. Cent. a.	Stammzahl. b.	Schaftinhalt (ohne Aeste). Cubicmeter. c.	Vielfacher Schaftinhalt (ohne Aeste). (b c.) Cubicmeter. d.
15	18	0,17	3,06
16	9	19	1,71
17	27	21	5,67
18	36	23	8,28
19	36	26	9,36
20	27	29	7,83
21	18	31,5	5,67
22	9	34	3,06
23	9	37	3,33
24	18	40	7,20
25	9	43	3,87
26	9	46	4,14
Masse der Klasse I.			63,18

*) S. 31 u. f. der angeführten Tafeln.

**) Außer dem Astholze ist in diesen Zahlen auch das unter 3 Cent. starke Wipfelholz nicht mit inbegriffen. Es entsprechen diese Schaftinhalte daher der von uns in den obigen Beispielen mit „Derbholz" bezeichneten Masse.

II. Höhenklasse. Mittlere Höhe 23 Meter.

Durchmesser bei 1,5m über dem Boden. Cent. a.	Stammzahl. b.	Schaftinhalt (ohne Aeste). Cubicmeter. c.	Vielfacher Schaftinhalt (ohne Aeste). (b c.) Cubicmeter. d.
18	9	0,30	2,70
19	9	33	2,97
20	18	36	6,48
21	18	40	7,20
22	54	44	23,76
23	36	47.5	17,10
24	36	51	18,36
25	27	55	14,88
26	18	59	10,62
27	36	63.5	22,86
28	9	68	6,12
29	27	72.5	19,58
30	9	77	6,93
31	.	.	.
32	18	87	15,66
33	18	92	16,56
34	9	97	8,73
35	.	.	.
36	.	.	.
37	.	.	.
38	9	1,19	10,71
Masse der Klasse II.			211,22

III. Höhenklasse. Mittlere Höhe 28 Meter.

Durchmesser bei 1,5m über dem Boden. Cent. a.	Stammzahl. b.	Schaftinhalt (ohne Aeste). Cubicmeter. c.	Vielfacher Schaftinhalt (ohne Aeste). (b c.) Cubicmeter. d.
23	18	0,57.5	10,35
24	27	62	16,74
25	9	67	6,03
26	9	72	6,48
27	45	77.5	14,88
28	9	83	7,47
29	9	88.5	7,97
30	18	94	16,92
31	9	1,00	9,00
32	27	1,06	28,62
33	9	1,12	10,08
34	9	1,18	10,62
35	.	.	.
36	9	1,32	11,88
37	9	1,38.5	12,47
38	.	.	.
39	.	.	.
40	.	.	.
41	9	1,66.5	14,99
42	.	.	.
43	9	1,81.5	16,34
Masse der Klasse III.			200,84

Wiederholung.

Masse der Klasse I.	63,18
„ „ „ II.	211,22
„ „ „ III.	200,84
Schaftholzmasse des Bestandes (ohne Aeste) . . .	475,24

3. Die Frage, welche der oben dargestellten Methoden zur Berechnung des Holzgehaltes der Bestände zu wählen sei, läßt sich nicht allgemein, sondern nur für jeden einzelnen Fall entscheiden. Bei ihrer Beantwortung sind maßgebend die Beschaffenheit des aufzunehmenden Bestandes und die Genauigkeit, welche erreicht werden soll. Werden an letztere nicht die höchsten Anforderungen gestellt, oder ist der Bestand sehr regelmäßig, dann wird man mit einem mittleren Modellstamm, von dem man natürlich mehrere Exemplare aufsucht und berechnet, ausreichen. Wird von der Aufnahme eine größere Genauigkeit gefordert, so müssen Stärkenklassen gebildet werden. Die genauesten Resultate werden natürlich durch Stärken- und Höhenklassen erzielt; doch läßt sich nach unseren Untersuchungen durch Stärkeklassen allein beinahe dieselbe Sicherheit der Aufnahme erreichen, wenn man nur den Abstand der Stärkenklassen nicht zu weit annimmt. Höhenklassen allein sind wenig zu empfehlen: sie stehen den Stärkenklassen in jeder Beziehung nach. Einmal verlangsamen sie die Arbeiten bei der Aufnahme und gewähren überdies auch eine geringere Genauigkeit als Stärkenklassen. Endlich wird mit guten Massentafeln, wenn man denselben die Inhalte der Stärkestufen unmittelbar entnimmt, dieselbe Genanigkeit erreicht werden können, als mit Stärkenklassenmodellstämme.*)

*) Die in den Rechnungsbeispielen mitgetheilten Zahlen sind bei einer Untersuchung wirklich erlangt worden, nur sind, um größere Zahlen zu erhalten, die Stammzahlen mit 9 multiplicirt; die Massen sind dadurch natürlich auch verneunfacht. Der wirkliche, durch sectionsweise Cubirung der Schäfte und Aichung und Wägung der Aeste erlangte Inhalt betrug, wenn man denselben gleichfalls mit 9 vervielfacht, 491,31 Cubicmeter Derbholz und 87,16 Cubicmeter Reißig. Vergleicht man diese Zahlen mit den unter 2abcd. erhaltenen, so ergiebt sich

a. bei einem mittleren Modellstamme der Gehalt an
   Derbholz zu klein um 17,00 Cubicmeter oder um 3,5 %,
   Reißig zu groß um 6,96 " " " 8,0 %;
b. bei Stärkenklassenmodellstämmen der Gehalt an
   Derbholz zu klein um 10,31 Cubicmeter oder um 2,1 %,
   Reißig zu klein um 3,29 " " " 3,8 %;
c. bei Höhenklassenmodellstämmen der Gehalt an
   Derbholz zu klein um 24,22 Cubicmeter oder um 4,9 %,
   Reißig zu klein um 2,93 " " " 3,4 %;
d. bei Höhenklassen und Anwendung von Massentafeln der Gehalt an
   Derbholz zu klein um 16,07 Cubicmeter oder um 3,3 %.

G. Heyer (Ueber die Ermittelung der Masse ꝛc. Anhang.) ermittelte auf 16 Probeflächen den Holzgehalt sowohl aus Klassenmodellstämmen als aus einem mittleren Modellstamme. Die aus dem mittleren Modellstamme abgeleitete Masse wich von der aus den Klassenmodellstämmen resultirenden um folgende Procente der letzteren ab:

4. Die Weite der Stärken- oder Durchmesserabstufungen darf man nicht zu groß wählen, wenn das Mittel aus den Massengehalten der in einer solchen Stufe vereinigten Stämme nahe gleich werden soll dem Massengehalte des Stammes, dessen Durchmesser das Mittel aus der oberen und unteren Grenze des Abstandes ist. Ist z. B. der Abstand der Stärkestufen gleich 2c, so ist der Durchmesser eines Stammes an der unteren Grenze dieser Stufe D — c, der eines solchen an der oberen Grenze D + c. Haben außerdem diese beiden Stämme die Höhe H und die Formzahl F, so ist die Summe der Inhalte beider

$$V_{D-c} + V_{D+c} = \frac{\pi}{4}\left[(D - c)^2 + (D + c)^2\right] HF,$$

$$= \frac{\pi}{2}(D^2 + c^2)\ HF,$$

während, wenn man diese Stämme in eine Stufe mit dem Durchmesser D vereinigt, deren Inhalt zu

$$2\ V_D = 2\frac{\pi}{4} D^2\ HF = \frac{\pi}{2} D^2\ HF$$

gefunden wird. Der Unterschied zwischen beiden Bestimmungen ist

$$V_{D-c} + V_{D+c} - 2\ V_D = \frac{\pi}{2} c^2\ HF,$$

derselbe wächst also mit dem Quadrate des halben Abstandes der Stärkenstufen. Wäre z. B. D = 15, c = 2 Cent, H = 20 Meter, F = 0,50, so wäre

$$V - V_1 = 1{,}570796 \cdot 0{,}0004 \cdot 20 \cdot 0{,}50 = 0{,}006283 \text{ Cubicmeter},$$

während für c = 3 Cent diese Differenz schon gleich 0,014137 Cubicmeter ist.

§. 40.
Ermittelung des Holzgehaltes der Modellstämme und Bestände nach Draudt's Verfahren.

1. In höchst sinnreicher und zugleich sehr praktischer Weise werden die Modellstämme nach Zahl und Masse von Draudt*)

---

1. bei den Buchen um:
— 2,45, — 2,00, — 1,81, — 0,86 — 0,047 + 0,89 + 1,52 + 4,52 + 5,71.
2. bei den Kiefern um:
— 4,74, — 4,08, — 3,92 + 2,23 + 4,13.
3. bei den Fichten um:
— 10,80.
4. bei den Lärchen um:
— 1,58.

*) Die Ermittelung der Holzmassen. Von Dr. Draudt. Allgem. Forst- u. Jagdz. 1869. S. 121. — Das Draudt'sche Verfahren hat zu lebhaften Erörterungen Anlaß gegeben. Die bezügliche Literatur findet sich besonders in der Allgem. Forst- u. Jagdz. Jahrg. 1860—1865.

ermittelt. Nachdem auf bekannte Weise der Bestand auskluppirt ist und für jede Stärkenstufe die Stammzahlen ermittelt sind, hat man sich zu entscheiden, wie viel Procente der vorhandenen Stämme als Modellstämme gefällt werden sollen. Sei diese Procentziffer p, die Gesammtzahl aller Stämme n, seien ferner die in den einzelnen Durchmesserstufen vorkommenden Stammzahlen n_0, n_1, n_2, ..., so entfallen auf die einzelnen Durchmesserstufen

$$0,\, 0p \,.\, n_0,\ 0,\, 0p \,.\, n_1,\ 0,\, 0p \,.\, n_2,\ \ldots$$

Modellstämme. Brüche, welche sich bei dieser Rechnung ergeben, werden auf bekannte Weise abgerundet. Dabei können mehrere Durchmesserstufen, von denen keine einen ganzen Modellstamm zeigt, auf geeignete Weise zusammengefaßt werden.

Man kann auch, was auf dasselbe hinausläuft, die Zahl ν der überhaupt zu fällenden Modellstämme festsetzen und erhält dann in dem Producte $\frac{\nu}{n}\,100$ die Procentziffer p der zu fällenden Probestämme, mit der man dann wie vorher verfährt.

Um nicht allzu viele Durchmesserstufen mit sehr kleinen Stammzahlen zu erhalten, wollen wir in dem von uns behandelten Beispiele, statt wie oben von Cent zu Cent, hier von 2 zu 2 Cent abstufen und erhalten dann folgende Durchmesserstufen und Stammzahlen:

Durchmesser bei 1,5m über dem Boden. Cent. a.	Stammzahl. b.	Kreisfläche. Quadratmeter. c.	Vielfache Kreisfläche. (b c.) Quadratmeter. d.
15	27	0,0177	0,4779
17	72	0227	1,6344
19	90	0284	2,5560
21	99	0346	3,4254
23	144	0415	5,9760
25	81	0491	3,9771
27	99	0573	5,6727
29	63	0661	4,1643
31	54	0755	4,0770
33	45	0855	3,8475
35	9	0962	0,8658
37	18	1075	1,9350
39	.	.	.
41	9	1320	1,1880
43	9	1452	1,3068
	819		41,1039

Sollten nun 10 Modellstämme gefällt werden, so würden $\frac{10}{819}\,100 = 1{,}2$ Procent der gesammten Stammzahl als solche zur Fällung gelangen müssen, und es würden sich dieselben auf die einzelnen Durchmesserstufen wie folgt vertheilen.

Auf die Durchmesserstufe	15	C.	kommen	$\frac{27.1{,}2}{100} = 0{,}324$	Modellstämme
" " "	17	"	"	$\frac{72.1{,}2}{100} = 0{,}854$	"
" " "	19	"	"	$\frac{90.1{,}2}{100} = 1{,}080$	"
" " "	21	"	"	$\frac{99.1{,}2}{100} = 1{,}188$	"
" " "	23	"	"	$\frac{144.1{,}2}{100} = 1{,}728$	"
" " "	25	"	"	$\frac{81.1{,}2}{100} = 0{,}972$	"
" " "	27	"	"	$\frac{99.1{,}2}{100} = 1{,}188$	"
" " "	29	"	"	$\frac{63.1{,}2}{100} = 0{,}756$	"
" " "	31	"	"	$\frac{54.1{,}2}{100} = 0{,}648$	"
" " "	33	"	"	$\frac{45.1{,}2}{100} = 0{,}540$	"
" " "	35	"	"	$\frac{9.1{,}2}{100} = 0{,}108$	"
" " "	37	"	"	$\frac{18.1{,}2}{100} = 0{,}216$	"
" " "	39	"	"	. = .	"
" " "	41	"	"	$\frac{9.1{,}2}{100} = 0{,}108$	"
" " "	43	"	"	$\frac{9.1{,}2}{100} = 0{,}108$	"

Es entfallen somit nach der Abrundung auf

die Durchmesserstufe	15	Cent	kein	Modellstamm,
" "	17	"	1	"
" "	19	"	1	"
" "	21	"	1	"

die Durchmesserstufe	23	Cent	2	Modellstämme,
" "	25	"	1	Modellstamm,
" "	27	"	1	"
" "	29	"	1	"
" "	31	"	1	"
" "	33	"	1	"
" "	35	"	kein	"
" "	37	"	"	"
" "	39	"	"	"
" "	41	"	"	"
" "	43	"	"	"
	zusammen		10	Modellstämme,

doch würde man, weil die Durchmesserstufen 35—43 Cent zusammen 45 Stämme umfassen und die Summe der Modellstämme dieser Stufen 0,540 beträgt, für diese Stufen noch einen gemeinschaftlichen Modellstamm von 37 Cent Durchmesser wählen.

Nachdem die Modellstämme in dem Bestande ausgesucht sind, wobei die schon früher gegebenen Regeln gelten, werden dieselben gefällt. Das Verfahren bei der Holzmassenberechnung derselben kann nur ein doppeltes sein. Entweder nämlich mißt und cubirt man die Stämme auf bekannte Weise in kurzen Sectionen, wobei man eine Sonderung nach Sortimenten vornehmen kann, und dieses Verfahren wird immer Platz greifen müssen, wenn die Anzahl der Modellstämme eine nur geringe ist; oder man läßt, wenn eine große Zahl solcher Stämme zu Gebote steht, dieselben in die gewöhnlichen Verkaufsmaße aufarbeiten, um die Masse des Bestandes unmittelbar in diesen Maßen zu erhalten. Ermittelt man nämlich die Masse der einzelnen Sortimente nach Festcubicmetern und verwandelt dieselbe dann durch Division mit den bezüglichen Reductionszahlen in Verkaufsmaße, so wird, wenn diese Reductionszahlen fehlerhaft ermittelt sind, die Massenaufnahme nicht mit dem Fällungsergebniß übereinstimmen. Diese Uebereinstimmung wird jedoch erzielt werden, wenn man den Inhalt der Modellstämme unmittelbar in Verkaufsmaßen angiebt. Bei einer kleinen Anzahl von Modellstämmen ist dieses Verfahren jedoch zu verwerfen, weil in diesem Falle häufig nur Theile von Verkaufsmaßen ausfallen und diese das Resultat ungenau machen. Drücken wir den Inhalt der Modellstämme in Cubicmetern aus, so erhalten wir folgende Rechnung:

Ordnungs-nummer.	Durchmesser bei $1{,}5^m$ über dem Boden. Cent.	Der Modellstämme			Holzgehalt in Cubicmetern an					
					Derbholz					
		Stückzahl.	Kreisfläche. Q.-M.	Vielfache Kreisfläche. Q.-M.	Nutzholz.	Scheitholz.	Klöppelholz.	Summe.	Reißig.	Summe.
1	15	.	.	.	.	.	.	.	.	.
2	17	1	0,0227	0,0227	.	.	.	0,1933	0,0576	0,2509
3	19	1	0284	0284	.	.	.	0,2639	0,0563	0,3202
4	21	1	0346	0346	.	.	.	0,3435	0,0417	0,3852
5	23	2	0415	0830	.	.	.	0,9092	0,1482	1,0574
6	25	1	0491	0491	.	.	.	0,5534	0,0806	0,6340
7	27	1	0573	0573	.	.	.	0,6490	0,0919	0,7409
8	29	1	0661	0661	.	.	.	0,7440	0,0975	0,8415
9	31	1	0755	0755	.	.	.	0,9289	0,1640	1,0929
10	33	1	0855	0855	.	.	.	1,1260	0,2083	1,3343
11	35	} 1	.	.	.	.	.	.	.	.
12	37		1075	1075	.	.	.	1,5541	0,2415	1,7956
13	39		.	.	.	.	.	.	.	.
14	41		.	.	.	.	.	.		.
15	43		.	.	.	.	.	.	.	.
Summe	.		.	0,6097	.	.	.	6,2653	1,1876	8,4529

Die Berechnung der Bestandesmasse erfolgt nun dadurch, daß man diese Masse zur Masse **m** der gesammten Modellstämme in demselben Verhältniß stehend annimmt, wie die Stammgrundfläche G des Bestandes zur Stammgrundfläche g der Modellstämme, d. h. man nimmt die Proportion

$$M : m = G : g$$

als gültig an. Aus dieser folgt aber

$$M = \frac{G}{g}\, m.$$

Ebenso erhält man die Masse des Derbholzes und Reißigs, so wie jedes Sortimentes durch Multiplication der an den Modellstämmen gewonnenen Zahlen mit $\frac{G}{g}$.

In unserem Beispiele ist

$$\frac{G}{g} = \frac{41{,}1039}{0{,}6097} = 67{,}4,$$

und damit*) die

*) Nach §. 39. Anm. ist die wirkliche Masse des Derbholzes 491,31 Cubicmeter, die des Reißigs 87,16 Cubicmeter. Man würde daher nach Draudt's Verfahren 2,63 Cubicmeter oder 0,5 % Derbholz und 7,12 Cubicmeter oder 8,2 % Reißig zu wenig erhalten.

Derbholzmasse	des Bestandes	= 7,2653.67,4 = 489,68	Cubicmeter,
Reißholzmasse	„ „	= 1,1876.67,4 = 80,04	„
Gesammtholzmasse	„ „	= 8,4529.67,4 = 569,72	„

Hätte man die Masse der Modellstämme in Verkaufsmaße aufgearbeitet, und erhalten

5,75 Cubicmeter Nutzholz in Klötzen,
1 Cubicmeter Scheitholz und einen Rest von 1.1.0,5 Cubicmeter,
kein Cubicmeter Klöppelholz und einen Rest von 1.1.0,4 Cubicmeter,
83 Wellen Reißholz,

so würde man als Bestandesmasse erhalten

Nutzholz	= 5,75·67,4		= 387,55 Festcbm.
Scheitholz	= 1·67,4 + 0,5·67,4	= 101,10 Raumm.*)	= 75,83 „
Klöppelholz	= 0,4·67,4	= 26,96 „	= 20,22 „
Derbholz			= 483,60 Festcbm.
Reißholz	= 83·67,4	= 55,84 Wellenhunderte	= 83,76 „

2. Die Richtigkeit des Draudt'schen Verfahrens liegt zwar so klar vor, daß ein Beweis dafür kaum nöthig ist; wir wollen jedoch denselben, sowie er von Draudt selbst geführt ist,**) noch beifügen.

Angenommen, es würden alle Stämme eines Bestandes in eine Klasse vereinigt und also die Fällung nur eines Modellstammes für alle Stärkestufen vorgenommen, so wäre die Bestandesmasse

$$M = \frac{G}{\mathfrak{g}} \mathfrak{m},$$

wo G die Kreisflächensumme des Bestandes, $\mathfrak{g}$ diejenige der Modellstämme, $\mathfrak{m}$ die Masse der letzteren bezeichnet.

Bildet man dagegen Durchmesserklassen und bezeichnet man dann die den Größen G, $\mathfrak{g}$ und $\mathfrak{m}$ entsprechenden Größen mit $G_0, G_1, G_2 \ldots., \mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2 \ldots., \mathfrak{m}_0, \mathfrak{m}_1, \mathfrak{m}_2 \ldots.$, so erhält man auch

$$M = \frac{G_0}{\mathfrak{g}_0} \mathfrak{m}_0 + \frac{G_1}{\mathfrak{g}_1} \mathfrak{m}_1 + \frac{G_2}{\mathfrak{g}_2} \mathfrak{m}_2 + \ldots.$$

Nun ist aber, wenn $n_0, n_1, n_2, \ldots.$ die Stammzahlen der einzelnen Stärkeklassen, $g_0, g_1, g_2, \ldots.$ die Kreisflächen eines Stammes in den letzteren bedeuten,

*) Der Raummeter Scheit- und Klöppelholz ist hier zu 0,75 Festmeter, das Wellenhundert zu 1,5 Festmeter angenommen.

**) Draudt, Die Ermittelung der Holzmassen. Gießen, 1860. S. 13 u. f.

$$G_0 = g_0\, n_0,\ G_1 = g_1\, n_1,\ G_2 = g_2\, n_2,\ \ldots$$

und, da die Zahl der Modellstämme proportional der Stammzahl gewählt wird,

$$\mathfrak{g}_0 = g_0\, n_0\, p,\ \mathfrak{g}_1 = g_1\, n_1\, p,\ \mathfrak{g}_2 = g_2\, n_2\, p,\ \ldots$$

Daraus folgt

$$G_0 : \mathfrak{g}_0 = 1 : p,\ G_1 : \mathfrak{g}_1 = 1 : p,\ G_2 : \mathfrak{g}_2 = 1 : p,\ \ldots$$

und da auch

$$G : \mathfrak{g} = 1 : p,$$

so sind die Verhältnisse $\frac{G_0}{\mathfrak{g}_0} = \frac{G_1}{\mathfrak{g}_1} = \frac{G_2}{\mathfrak{g}_2} = \ldots$ constant und gleich $\frac{G}{\mathfrak{g}}$ und man erhält damit

$$M = \frac{G}{\mathfrak{g}}\,\mathfrak{m} = \frac{G}{\mathfrak{g}}\,\mathfrak{m}_0 + \frac{G}{\mathfrak{g}}\,\mathfrak{m}_1 + \frac{G}{\mathfrak{g}}\,\mathfrak{m}_2 + \ldots$$
$$= \frac{G}{\mathfrak{g}}\left(\mathfrak{m}_0 + \mathfrak{m}_1 + \mathfrak{m}_2 + \ldots\right)$$

woraus sich

$$\mathfrak{m} = \mathfrak{m}_0 + \mathfrak{m}_1 + \mathfrak{m}_2 + \ldots.$$

ergiebt.

Die Masse der Modellstämme ist also in beiden Fällen gleich und damit der Nachweis erbracht, daß auch die Masse des Bestandes in beiden Fällen sich gleich berechnen muß.

3. Ueber die Genauigkeit, mit welcher das Draudt'sche Verfahren den Holzgehalt der Bestände berechnet, liegen nur zwei kleine Untersuchungen*) vor: bei der ersten fand sich der Inhalt von 174 Stämmen, deren Durchmesser zwischen 18,4 und 85,1 Cent schwankten, gleich 352,11 Cubicmeter, die Stammgrundfläche derselben zu 28,0703 Quadratmeter, die Kreisfläche des mittleren Modellstammes zu 0,1613 Quadratmeter, der Durchmesser desselben zu 45,3 Cent, der Inhalt desselben aus vier gefällten Stämmen zu 1,8287 Cubicmeter. Der Inhalt des Bestandes folgt daher zu 317,89 Cubicmeter. Aus zwei Classenmodellstämmen ergab sich die Bestandesmasse zu 367,67 Cubicmeter, nach Draudt's Verfahren endlich zu 348,04 Cubicmeter. Es sind dies Fehler von — 9,7, + 4,4 und — 1,2 Procent.

Der zweite Versuch ergab an 61 sehr ungleichwüchsigen Stämmen den Inhalt gleich 165,92 Cubicmeter, die Kreisflächensumme gleich 12,1607 Quadratmeter, die Kreisfläche des mittleren Modellstammes gleich 0,1994 Quadratmeter, den Durchmesser desselben gleich 50,4 Cent. Der Cubicinhalt des mittleren Modellstammes erfolgte aus drei Fällungen zu 2,8137 Cubicmeter und

*) Allgem. Forst- u. Jagdz. 1863. S. 170.

der Inhalt des Bestandes damit zu 171,64 Cubicmeter, während Draudt's Methode 166,11 Cubicmeter ergab. Es sind dies Fehler von + 3,5 und + 0,1 Procent.

§. 41.

Die Berechnung des Holzgehaltes der Bestände mit Hülfe von Formzahlen.

1. Anstatt Modellstämme auszuwählen und liegend oder im Stehen zu cubiren, kann man in Fällen, wo keine sehr große Genauigkeit gefordert wird, dieses Hülfsmittels auch entrathen und den Holzgehalt des Bestandes mit Hülfe von Formzahlen bestimmen. Man ermittelt zuerst durch Kluppiren die Stammgrundfläche G des Bestandes in Brusthöhe, mißt oder schätzt dann dessen mittlere Höhe H, und entnimmt endlich einer vorhandenen oder selbst construirten Formzahltafel die unechte Formzahl F. Dann wird die Bestandesmasse

$$M = GHF.$$

Wäre z. B. in einem Fichtenbestande die Stammgrundfläche gleich 42,7509 Quadratmeter, die mittlere Höhe gleich 23 Meter, die mittlere Formzahl (s. S. 110.) gleich 0,553, so hätte man als Bestandesmasse (Derbholz und Reißig)

$$M = 42{,}7509 \,.\, 23 \,.\, 0{,}553 = 543{,}75 \text{ Cubicmeter.}$$

Fänden sich in dem aufzunehmenden Bestande sehr bedeutende Höhendifferenzen, so müßte man Höhenklassen bilden und für jede derselben die Formzahl bestimmen. Hätte man z. B. q Höhenklassen unterschieden mit den mittleren Höhen H_0, H_1, H_2, ..., den Formzahlen F_0, F_1, F_2, ... und den Stammgrundflächen G_0, G_1, G_2, ..., so wäre die Bestandesmasse

$$M = G_0 H_0 F_0 + G_1 H_1 F_1 + G_2 H_2 F_2 + \ldots$$

Für $G_0 = 6{,}9687$, $G_1 = 18{,}9891$, $G_2 = 16{,}7031$ Quadratmeter, $H_0 = 18$, $H_1 = 23$, $H_2 = 28$ Meter und $F_0 = 0{,}565$, $F_1 = 0{,}553$, $F_2 = 0{,}540$ wird

$$M = 6{,}9687 \,.\, 18 \,.\, 0{,}565 + 18{,}9891 \,.\, 23 \,.\, 0{,}553 + 16{,}7031 \,.\, 28 \,.\, 0{,}540$$
$$= 70{,}87 + 241{,}52 + 252{,}55 = 564{,}94 \text{ Cubicmeter.}$$

2. Will man sich nicht der unechten, sondern der echten Formzahlen bedienen, so kluppirt man den Bestand gleichfalls in Brusthöhe, um die Stammgrundfläche zu erhalten, mißt sodann die Höhe und corrigirt endlich eine dieser beiden Größen oder auch die echte Formzahl nach der auf S. 128 gegebenen Correctionstafel. Die Bestandesmasse wäre somit

$$M = (G + Gc)\, H F = G\, (H + Hc)\, F = G H\, (F + Fc),$$

wo c*) die anzubringende Verbesserung bedeutet.

---

*) Ueber die Bedeutung von c vergl. S. 126.

Hätte man wegen großer Höhenunterschiede im Bestande Höhenklassen zu bilden gehabt, so wäre nach der unter 1. gebrauchten Bezeichnung und wenn c_0, c_1, c_2, ... die Correctionen der Stammgrundflächen, Höhen oder Formzahlen bedeuten,

$$M = G_0(H_0 + H_0c_0)F_0 + G_1(H_1 + H_1c_1)F_1 + G_2(H_2 + H_2c_2)F_2 + \ldots$$

Wäre z. B. die Kluppirung bei 1,5 Meter über dem Boden erfolgt, und die Bestandeshöhe gleich 23 Meter, so betrüge die Correction + 7 Procent; und wenn man den Bestand als Altholz mit der Schaftformzahl 0,49 und der Astformzahl 0,08 anspräche, so hätte man die Bestandesmasse

$$M = 42{,}7509\left(23 + \frac{23 \cdot 7}{100}\right)0{,}57 = 42{,}7509 \cdot 24{,}61 \cdot 0{,}57$$
$$= 599{,}35 \text{ Cubicmeter.}$$

Hätte man dagegen Höhenklassen mit den mittleren Höhen 18, 23 und 28 Meter gebildet, so würden denselben die Correctionen + 12, + 7, + 2 Procent beizufügen sein. Damit würde die Bestandesmasse

$$M = \left[6{,}9687\left(18 + \frac{18 \cdot 12}{100}\right) + 18{,}9891\left(23 + \frac{23 \cdot 7}{100}\right) + 16{,}7031\left(28 + \frac{28 \cdot 2}{100}\right)\right]0{,}57$$
$$= \left[6{,}9687 \cdot 20{,}16 + 18{,}9891 \cdot 24{,}61 + 16{,}7031 \cdot 28{,}56\right]0{,}57$$
$$= 618{,}37 \text{ Cubicmeter.}$$

§. 42.

Die Berechnung des Holzgehaltes der Bestände mit Hülfe von Probeflächen.

1. Die stammweise Aufnahme eines größeren Bestandes scheint früher (wohl auch noch jetzt) für ungemein zeitraubend*) gehalten worden zu sein. Man begnügte sich deshalb damit, nur einen kleinen Theil des Bestandes stammweise aufzunehmen und von der Masse und Flächengröße dieser kleinen Fläche und von der bekannten Flächengröße des ganzen Bestandes auf die Masse des letzteren zu schließen. Ist auch der erwähnte Beweggrund, großer Zeitaufwand, hinfällig, so sind doch immerhin

---

*) Nach unseren Erfahrungen lassen sich mit zwei Kluppenführern ohne große Anstrengung in haubaren Beständen, in welchen nicht durch Strauchhölzer oder die Bodenbeschaffenheit das Gehen sehr erschwert wird, täglich 5000—6000 Stämme aufnehmen, d. h. wenn wir 600—800 Stämme auf den Hectar rechnen, zwischen 6—8 Hectar. Aehnliche Erfahrungen theilt Baur (Anleitung, S. 235.) mit.

Fälle denkbar, in welchen die Aufnahme von Probeflächen gerechtfertigt erscheint.*) Es mag deshalb auch dieses Verfahren der Bestandesmassenermittelung eine kurze Darstellung finden.

Die Auswahl der Probeflächen hat mit besonderer Sorgfalt zu geschehen, da Fehler, in dieser Hinsicht begangen, um so schwerer in's Gewicht fallen, je größer die aufzunehmenden Bestände sind. Die Probeflächen müssen deshalb so gelegt werden, daß in denselben der durchschnittliche Charakter des Bestandes ausgesprochen ist. Dieser Durchschnitt wird sich aber um so sicherer erkennen, und eine ihm entsprechende Fläche um so leichter auffinden lassen, je gleichmäßiger der Bestand bestockt ist. Man wird deshalb auch nur solche Bestände, welche gleichmäßig erwachsen sind und keine durch Elementarschäden ꝛc. bewirkte Lücken zeigen, ihrer Masse nach durch Probeflächen aufnehmen. Lückige Bestände sind daher von der Aufnahme nach Probeflächen ganz auszuschließen.

In Beständen, welche an Berghängen liegen und welche vom Fuße nach der Spitze hin allmählich ihre Beschaffenheit ändern, ohne daß eine scharfe Trennung vorhanden und demgemäß eine Spaltung in mehrere Bestände möglich wäre, wird man entweder eine Probefläche so legen, daß dieselbe alle Verschiedenheiten des Bestandes enthält, oder, was zweckmäßiger, man wird sich den Bestand in mehrere Streifen zerlegt denken, deren Trennungslinien den Niveaucurven des Hanges parallel sind, und in jedem dieser Streifen einen Probeplatz wählen. Bei regelmäßig erzogenen Beständen, also Saat- und Pflanzbeständen, muß man die Umfangslinien der Probeflächen in die Mitte der Saat- und Pflanzreihen legen.

2. Von allen Probeflächen, mögen dieselben Zwecken dienen, welchen sie wollen, verlangt man, daß ihr Umfang ein Minimum sei, d. h. daß ihre Figur so beschaffen sei, daß der dieser Figur zukommende Umfang weniger betrage als bei jeder andern Figur von gleicher Fläche, weil in diesem Falle die störenden Einflüsse möglichst klein werden. Dieser Forderung entspricht bekanntlich der Kreis. Da aber das Abstecken eines Kreises in Holzbeständen

---

*) Wie sehr man sich über den Zeitgewinn bei der Massenaufnahme der Bestände durch Probeflächen gegenüber der stammweisen Aufnahme täuscht, zeigt ein Versuch von Baur (Anleitung, S. 241). Der Genannte brauchte zur Auswahl des 0,58 Hectar großen Probeplatzes 10 Minuten, zum Abstecken desselben und zur Bezeichnung des Umfanges 28 Minuten, zum Kluppiren 20 Minuten, zusammen also 58 Minuten. Die Kluppirung des ganzen 1,90 Hectar großen Bestandes dagegen erforderte nur 60 Minuten Zeit, so daß der auf Kosten der Genauigkeit erreichte Zeitgewinn in diesem Fall nur 2 Minuten beträgt!

ziemlichen Schwierigkeiten unterliegen würde, so muß man eine Figur wählen, welche sich bequem darstellen läßt, das Viereck. Von den Arten dieser Figur entspricht nur das Quadrat*) der Forderung, daß sein Umfang ein Minimum. Man wird daher den Probeflächen die Form eines Quadrates oder wenigstens eines Rechteckes geben, welches dem Quadrate möglichst nahe kommt.**)

Die Größe der Probeflächen wird unter ein bestimmtes Maß nicht herabgehen dürfen, weil man bei sehr kleinen Flächen durchaus nicht im Stande ist, in denselben den mittleren Charakter der Bestände auszudrücken. Die Größe von 0,5 Hectar möchte bei haubaren Beständen wohl das kleinste zulässige Maß sein. Bei jüngeren gleichförmigen Beständen darf man vielleicht bis auf 0,25 Hectar herabgehen.***)

Das Abstecken der Winkel der Probeflächen geschieht mit einer Kreuzscheibe oder einem ähnlichen einfachen Instrumente, die Seiten werden mit der Kette, dem Stahlbande oder mit gut gedrehten Meßschnüren gemessen. Das Verfahren beim Messen und Abstecken kann hier als bekannt vorausgesetzt werden. Die Umfangslinien werden sodann durch leichtes Aufreißen des Bodens kenntlich gemacht. Soll die Probefläche längere Zeit bleibend sein, so muß sie in den Eckpunkten dauerhaft verpfählt oder besser noch versteint werden.

---

*) Ist A der Flächeninhalt des Rechteckes, x dessen eine Seite, so wird die andere $\frac{A}{x}$. Es ist daher die Bedingung aufzusuchen, unter welcher der Umfang u oder die Summe $2\left(x + \frac{A}{x}\right)$ ein Minimum wird. Nun ist

$$u = 2\left(x + \frac{A}{x}\right)$$

gleich

$$u = 2\left[2\sqrt{A} + \left(\sqrt{x} - \sqrt{\frac{A}{x}}\right)^2\right].$$

Dieser Ausdruck wird aber ein Minimum, wenn $\sqrt{x} - \sqrt{\frac{A}{x}} = 0$, d. h. wenn $x = \sqrt{A}$. Damit wird die eine Seite gleich $\sqrt{A}$, die andere gleich $\frac{A}{\sqrt{A}} = \sqrt{A}$, das Rechteck also zum Quadrat.

**) Theodor Hartig schlägt vor (Vergleichende Untersuchungen über den Ertrag der Rothbuche. S. 48.), den Probeflächen die Gestalt eines gleichschenkeligen rechtwinkeligen Dreieckes zu geben. Die Probeflächen Hartig's sind jedoch nicht Probeflächen in unserem Sinne, sondern Flächen, welche zur Ermittelung des Holzvorrathes normal bestockter Bestände dienen sollen. Für diesen Zweck ist der Hartig'sche Vorschlag nicht ganz zu verwerfen.

***) Ueber die Größe der Probeflächen ist noch zu vergleichen: G. Heyer, über die Größe der Probeflächen. Allgem. Forst- u. Jagdz. 1861. S. 399.

3. Die Ermittelung der Holzmasse der Probeflächen geschieh nach den oben angegebenen Methoden. Man bestimmt durc Kluppiren zuerst die Summe der Stammgrundflächen der Probe= fläche, ermittelt dann den Durchmesser des mittleren Modell= stammes oder der Klassenmodellstämme, fällt dieselben und berech= net deren Masse. Soll die Probefläche eine bleibende sein, s darf man die Modellbäume nicht innerhalb derselben auswählen sondern muß dieselben außerhalb im angrenzenden Bestand aus= suchen. Die Holzmasse auf der Probefläche ergiebt sich dann au die eben gelehrte Weise.

Im Niederwalde und in ganz jungen Hochwaldbeständen ermittelt man die Masse am besten durch kahlen Abtrieb.

4. Die Masse des Bestandes folgt dann aus dessen Flächen= größe und aus der Flächengröße und Masse der Probefläche Denn unter der Voraussetzung, daß der mittlere Charakter de Bestandes in der Probefläche ausgedrückt sei, muß sich offenba die Masse M des Bestandes zur Masse $\mathfrak{M}$ der Probefläche ver= halten, wie die Fläche A des Bestandes zur Fläche $\mathfrak{A}$ der Probe= fläche, d. h. es muß

$$M : \mathfrak{M} = A : \mathfrak{A}$$

oder

$$M = \frac{A}{\mathfrak{A}} \mathfrak{M}$$

sein.

Wäre beispielsweise $A = 12{,}5$ Hectar, $\mathfrak{A} = 0{,}5$ Hectar $\mathfrak{M} = 320{,}54$ Festcubicmeter, so wäre

$$M = \frac{12{,}5}{0{,}5} \cdot 320{,}54 = 8013{,}50 \text{ Festcubicmeter.}$$

5. Man hat wohl auch die Bestandesmasse ohne Kenntniß de Flächen des Bestandes und der Probefläche nur aus den Stamm= zahlen des Bestandes und der Probefläche und aus der Mass der letzteren ermittelt, indem man schloß, daß sich die Masse M des Bestandes zur Masse $\mathfrak{M}$ der Probefläche verhalten müsse wie die Stammzahl N des Bestandes zur Stammzahl $\mathfrak{N}$ der Probe= fläche, daß also

$$M : \mathfrak{M} = N : \mathfrak{N}$$

oder

$$M = \frac{N}{\mathfrak{N}} \mathfrak{M}$$

sein müsse.

So würde für $\mathfrak{M} = 320{,}54$, $N = 6200$, $\mathfrak{N} = 310$,

$$M = \frac{6200}{310} \cdot 320{,}54 = 6410{,}80 \text{ Cubicmeter.}$$

Dieses Verfahren wird in dem Falle rascher zum Ziele führen als das vorige, wenn von einem Bestande die Flächengröße nicht be=

kannt ist. Wo diese Kenntniß vorhanden ist, da wird das Auszählen der Stämme des Bestandes größeren Zeitaufwand verursachen, als das Abstecken der Probefläche. Die Genauigkeit dieser zweiten Methode ist aber vielleicht etwas größer als die der ersten, weil hier etwaige in dem Bestande enthaltenen Ungleichheiten oder Lücken, welche bewirken, daß die Probefläche nicht dem Durchschnitte des Bestandes entspricht, nicht störend einwirken können.

Dritter Theil.

Die Berechnung des Zuwachses.

Einleitung.

§. 43.

Begriff und Arten des Zuwachses.

Unter Zuwachs eines Baumes oder Bestandes versteht man die Mehrung der Holzmasse, welche aus der Bildung des jährlichen Holzringes hervorgeht. Dieser Zuwachs, welcher dem Auge des Beobachters am einzelnen Baume einmal als eine Vergrößerung der Höhe durch den Jahrestrieb (Höhen- oder Längenzuwachs), dann als eine Zunahme der Durchmesser (Durchmesser- oder Stärkenzuwachs) erscheint, bildet einen den vorjährigen Baumschaft umgebenden und auf's Innigste mit demselben verbundenen Hohlkegel, welcher den Massenzuwachs des Baumes darstellt. Je nach Alter, Standort, Art und Größe der Beastung ꝛc. ist dieser Hohlkegel verschieden gestaltet, und ändert dadurch von Jahr zu Jahr die Form, mithin auch die Formzahl des Baumes. Am deutlichsten spricht sich diese Formänderung aus, wenn man sich den Baumschaft von einer durch seine Längsaxe gelegten Ebene (Meridianebene) geschnitten denkt. Diese Ebene schneidet natürlich auch die Mantelflächen aller, den Baum zusammensetzenden Hohlkegel, und es treten die Durchschnitte dieser Ebene mit den einzelnen Mantelflächen als eine Schaar ſ-förmiger, in gewissen wechselnden Entfernungen neben einander hinlaufender Curven hervor.

Gemessen werden der Höhen- und Stärkenzuwachs durch die Längeneinheit (Meter), der Massenzuwachs durch die Cubiceinheit (Festmeter).

Man nennt den Massenzuwachs eines Jahres im Besonderen noch jährlichen oder laufend jährlichen Zuwachs, zum Unter-

schiede von dem periodischen Zuwachs, d. h. demjenigen, welcher innerhalb einer gewissen längeren oder kürzeren Reihe von Jahren (Periode) erfolgt; und zum Unterschiede von dem Gesammt-alters-, totalem oder summarischem Zuwachs, welcher gleich ist dem von der Begründung des Baumes oder Bestandes bis zu einem gewissen Zeitpunkte erfolgten Zuwachse, der also auch gleich ist der Masse des Baumes oder Bestandes in diesem Zeitpunkte.

Ferner hat man noch unterschieden den durchschnittlichen jährlichen Zuwachs, welcher sich ergiebt, wenn man die bis zu einem gewissen Zeitpunkt erfolgte Zuwachsmasse, also den summarischen Zuwachs, durch die Zahl der Jahre des Gesammt-alters dividirt; und den durchschnittlichen periodischen Zuwachs, welcher aus der Division des periodischen Zuwachses durch die Zahl der Jahre der Periode hervorgeht.

Wäre z. B. der Inhalt eines Baumes am Ende des 100sten Jahres 1,05 Cubicmeter, am Ende des 99sten dagegen 1,01 Cubicmeter, so wäre der jährliche oder laufend jährliche Zuwachs 0,04 Cubicmeter. Hätte derselbe Baum am Ende des 90sten Jahres 0,75 Cubicmeter Inhalt besessen, so wäre der Zuwachs in der 10jährigen Periode vom 90sten bis 100sten Jahre 1,05 — 0,75 oder 0,30 Cubicmeter, während der Gesammtalters-zuwachs im 100sten Jahre 1,05 Cubicmeter sein würde. Als jährlicher Durchschnittszuwachs im 100sten Jahre ergäbe sich 1,05 : 100 = 0,0105 Cubicmeter, im 90sten Jahre dagegen 0,75 : 90 = 0,00833 Cubicmeter; der periodische Durchschnitts-zuwachs vom 90sten bis 100sten Jahre endlich fände sich zu (1,05 — 0,75) : 10 = 0,30 : 10 = 0,03 Cubicmeter.

Da man bei Beständen einen Haupt- und Zwischenbestand zu unterscheiden hat, so kann sich die Zuwachsuntersuchung entweder auf die Masse des Haupt- oder des Zwischenbestandes, oder auf die Summe beider beziehen.

§. 44.
Ueber den Zusammenhang des laufend jährlichen Zuwachses mit dem Durchschnittszuwachse.

Die Gesetze des Zuwachses der einzelnen Holzarten können natürlich nicht Gegenstand der Holzmeßkunst sein. Nur so viel sei erwähnt, daß der laufend jährliche Zuwachs unserer Holzpflanzen in den ersten Jahren ihres Lebens sehr gering ist, dann allmählich steigt, ein Maximum erreicht und sodann wieder fällt. Die Art des Steigens und Fallens, und der Zeitpunkt, wenn das Maximum eintritt, sind nach Holzart, Boden, Behandlung ꝛc. verschieden. Die Erfahrung hat ferner ergeben, daß der durchschnittliche jährliche Zuwachs einen anderen Gang verfolgt als

der laufend jährliche, sein Maximum später erreicht und dann rascher zu sinken beginnt als dieser.

Der Zusammenhang zwischen beiden Zuwachsarten, dem laufend jährlichen und jährlichem Durchschnittszuwachs, läßt sich außer durch Untersuchungen im Walde zum Theil schon durch bloße Ueberlegung finden. Bezeichnet nämlich $z_1, z_2, z_3, \ldots z_n$ den laufend jährlichen Zuwachs im 1, 2, 3, ... nten Jahre, so ist natürlich

z_1 die Holzmasse des Baumes oder Bestandes am Ende des 1sten Jahres,

$z_1 + z_2$ die Holzmasse des Baumes oder Bestandes am Ende des 2ten Jahres,

$z_1 + z_2 + z_3$ die Holzmasse des Baumes oder Bestandes am Ende des 3ten Jahres,

⋮

$z_1 + z_2 + z_3 + \ldots + z_n$ die Holzmasse des Baumes oder Bestandes am Ende des nten Jahres,

und

$\zeta_1 = \frac{1}{1} z_1$ der durchschnittliche Zuwachs im 1sten Jahre,

$\zeta_2 = \frac{1}{2}(z_1 + z_2)$ " " " 2ten "

$\zeta_3 = \frac{1}{3}(z_1 + z_2 + z_3)$ " " " 3ten "

⋮

$\zeta_n = \frac{1}{n}(z_1 + z_2 + z_3 + \ldots + z_n)$ " " nten "

Nimmt man nun an, der laufend jährliche Zuwachs steige von Jahr zu Jahr und erreiche im nten Jahre sein Maximum, so ist

$$z_n > z_1$$
$$z_n > z_2$$
$$z_n > z_3$$
$$\vdots$$
$$z_n = z_n,$$

mithin durch Addition dieser Ungleichungen

$$n z_n > z_1 + z_2 + z_3 + \ldots + z_n,$$

und

$$z_n > \frac{1}{n}(z_1 + z_2 + z_3 + \ldots + z_n),$$

oder da $\frac{1}{n}(z_1 + z_2 + z_3 + \ldots + z_n) = \zeta_n$, auch

$$z_n > \zeta_n,$$

d. h. der laufend jährliche Zuwachs ist bis zu seiner Culmination immer größer als der jährliche Durchschnittszuwachs.

Wird nun der laufend jährliche Zuwachs im $(n+1)$ten Jahre gleich z_{n+1}, so ist der Durchschnittszuwachs in diesem Jahre

$$\zeta_{n+1} = \frac{1}{n+1}\left(z_1 + z_2 + z_3 + \ldots + z_n + z_{n+1}\right)$$

oder

$$(n+1)\,\zeta_{n+1} = z_1 + z_2 + z_3 + \ldots + z_n + z_{n+1},$$

und auch, da $z_1 + z_2 + z_3 + \ldots + z_n = n\zeta_n$,

$$(n+1)\,\zeta_{n+1} = n\zeta_n + z_{n+1},$$

woraus sich

$$\zeta_n = \frac{1}{n}\Big[(n+1)\,\zeta_{n+1} - z_{n+1}\Big]$$
$$= \zeta_{n+1} + \frac{1}{n}\Big[\zeta_{n+1} - z_{n+1}\Big]$$

ergiebt.

Wird nun der laufend jährliche Zuwachs im $(n+1)$ten Jahre oder z_{n+1} kleiner als derjenige im $n$ten Jahre oder z_n, bleibt aber noch größer als der Durchschnittszuwachs im $(n+1)$ten Jahre oder ζ_{n+1}, wird also $z_{n+1} > \zeta_{n+1}$, so ist die Differenz $z_{n+1} - \zeta_{n+1}$ negativ und gleich $-\mathfrak{z}_{n+1}$, und damit

$$\zeta_n = \zeta_{n+1} - \frac{1}{n}\,\mathfrak{z}_{n+1}$$

oder

$$\zeta_{n+1} = \zeta_n + \frac{1}{n}\,\mathfrak{z}_{n+1}.$$

Aus letzterer Gleichung folgt

$$\zeta_{n+1} > \zeta_n,$$

d. h. so lange der laufend jährliche Zuwachs noch über dem Durchschnittszuwachse steht, so lange nimmt der Durchschnittszuwachs noch zu.

Wird dagegen der laufend jährliche Zuwachs kleiner als der Durchschnittszuwachs, oder $\zeta_{n+1} > z_{n+1}$, so bleibt die Differenz $\zeta_{n+1} - z_{n+1}$ positiv und gleich $+\mathfrak{z}_{n+1}$, und es wird

$$\zeta_n = \zeta_{n+1} + \frac{1}{n}\,\mathfrak{z}_{n+1}$$

oder

$$\zeta_{n+1} = \zeta_n - \frac{1}{n}\,\mathfrak{z}_{n+1}.$$

Diese letztere Gleichung ergiebt sofort die Ungleichung

$$\zeta_{n+1} < \zeta_n,$$

d. h. sinkt der laufend jährliche Zuwachs nach seiner Culmination unter den Durchschnittszuwachs herab, so sinkt auch der Durchschnittszuwachs selbst.

Wird dagegen der laufend jährliche Zuwachs nach seiner Culmination gleich dem Durchschnittszuwachse, findet also die

Gleichung statt $\zeta_{n+1} = z_{n+1}$, so wird die Differenz $\zeta_{n+1} - z_{n+1} = 0$, und

$$\zeta_n = \zeta_{n+1},$$

d. h. der Durchschnittszuwachs erreicht dann seinen größten Werth, wenn derselbe mit dem laufenden Zuwachse zusammenfällt.*)

Eine Wirthschaft also, welche die größte Holzmasse zu erzeugen strebt, muß als Umtriebszeit die Altersstufe ihrer Holzbestände wählen, in welcher der laufende Zuwachs gleich dem Durchschnittszuwachs ist.

Erstes Capitel.

Die Berechnung des Zuwachses einzelner Bäume.

§. 45.

Die Messung und Berechnung des Höhenzuwachses.

Die Berechnung des Längenzuwachses an gefällten Hölzern ist bei einigen Nadelbäumen, nämlich denjenigen, welche die Grenzen der einzelnen Jahrestriebe durch quirlförmig gestellte Aeste auszeichnen, nicht schwierig. Denn um den Punkt zu finden, wo die Spitze des Baumes vor m Jahren sich befand, braucht man nur m Jahrestriebe von der jetzigen Spitze aus zurückzuzählen. Die Entfernung des mten Astquirles von der jetzigen Spitze, in Metern gemessen, ist dann gleich dem Höhenzuwachse der letzten m Jahre. An stehenden Stämmen, bei welchen man die Entfernung dieser beiden Punkte nicht durch unmittelbares Anlegen eines Längenmessers (Band, Latte) bestimmen kann, muß man diese Messung mittelbar ausführen, indem man die Höhen des früheren und des jetzigen Stammes über dem Boden oder dem Horizonte des Auges bestimmt. Aus der Differenz dieser beiden Höhen wird dann der Höhenzuwachs gefunden. Bei älteren Nadelholzstämmen, besonders bei denjenigen der Kiefer, und bei

*) Den hier gegebenen elementaren Beweis dieses Satzes hat Jäger gelegentlich einer Recension über Karl Heyer's Waldertrags-Regelung gegeben. Vergl. Allgem. Forst- u. Jagdz. 1841. S. 177. Andere Beweise, welche sich auf höhere Analysis stützen, sind von Dienger (Grunert, Archiv für Mathematik u. Physik. 41. Bd. S. 191.) und Lehr (Allgem. Forst- u. Jagdz. 1870. S. 482. u. Heyer, Forstl. Statik. 1. Abth. S. 126.) gegeben worden.

Laubhölzern versagt jedoch dieses Hülfsmittel seinen Dienst. Bei diesen wird daher eine scharfe Bestimmung des Höhenzuwachses an stehenden Stämmen unmöglich, und es kann nur an gefällten Stämmen eine genaue Messung des Längenzuwachses stattfinden, bei welcher man wie folgt verfährt. Man wählt einen Punkt, von dem man glaubt, daß sich daselbst vor m Jahren die Spitze des Baumes befunden habe, durchschneidet den Stamm an dieser Stelle und zählt die Anzahl der Jahrringe auf der Schnittfläche. Beträgt dieselbe mehr als m, so ist dies ein Zeichen, daß der gesuchte Punkt weiter hinauf, nach der jetzigen Spitze zu liegt; beträgt dieselbe weniger als m, so muß der gesuchte Punkt noch ein Stück unter dem Durchschnitte sich befinden. Im ersten Falle muß man einen Schnitt weiter am Stamme hinauf, im zweiten einen solchen weiter am Stamme hinab führen und dies Verfahren so lange wiederholen, bis man auf einen Punkt kommt, wo die Zahl der Jahrringe eben m beträgt.

Will man sich über das Längenwachsthum eines Stammes während seiner ganzen Lebensperiode unterrichten, so zertheilt man den Schaft in Sectionen und legt die Schnittflächen bei Nadelhölzern besonders dahin, wo alte Aeste oder Spuren derselben, welche durch Vertiefungen sich aussprechen, das Vorhandensein früherer Astquirle vermuthen lassen, und zählt dann die Zahl der Jahrringe auf jeder Schnittfläche. Fände man z. B. die Zahl der Jahrringe auf der einen Schnittfläche gleich 68, und auf der anderen gleich 76, und wäre die erste Fläche 23, die zweite 19 Meter über dem Boden, so würde der Baum bei 76 Jahren etwa 23, bei 68 Jahren etwa 19 Meter hoch gewesen sein, und der Längenzuwachs in dieser Zeit oder in 8 Jahren ungefähr 4 Meter, für jedes einzelne Jahr also 0,5 Meter betragen haben. Eine etwas genauere Bestimmung des Längenzuwachses werden wir weiter unten in §. 48 angeben.

§. 46.

Die Messung und Berechnung des Durchmesserzuwachses (Stärkenzuwachses).

1. **Art und Weise der Messung und Berechnung des Durchmesserzuwachses.** Während die Grenze des jährlichen Höhenzuwachses bei nur wenigen Holzarten auch später noch deutlich erkannt werden kann, ist die jährliche Zunahme des Durchmessers bei unseren Holzarten dadurch deutlich charakterisirt, daß der jährlich sich anlegende Jahrring an seiner äußeren und inneren Grenze durch verschiedene Färbung von dem folgenden und vorhergehenden geschieden ist. Eine Ausnahme hiervon machen nur einige Laubhölzer, z. B. Aspe, Birke und zuweilen

Buche, bei welchen es erst der Anwendung einiger Hülfsmittel bedarf, um die Grenzen der Jahresringe deutlich sichtbar zu machen.*)

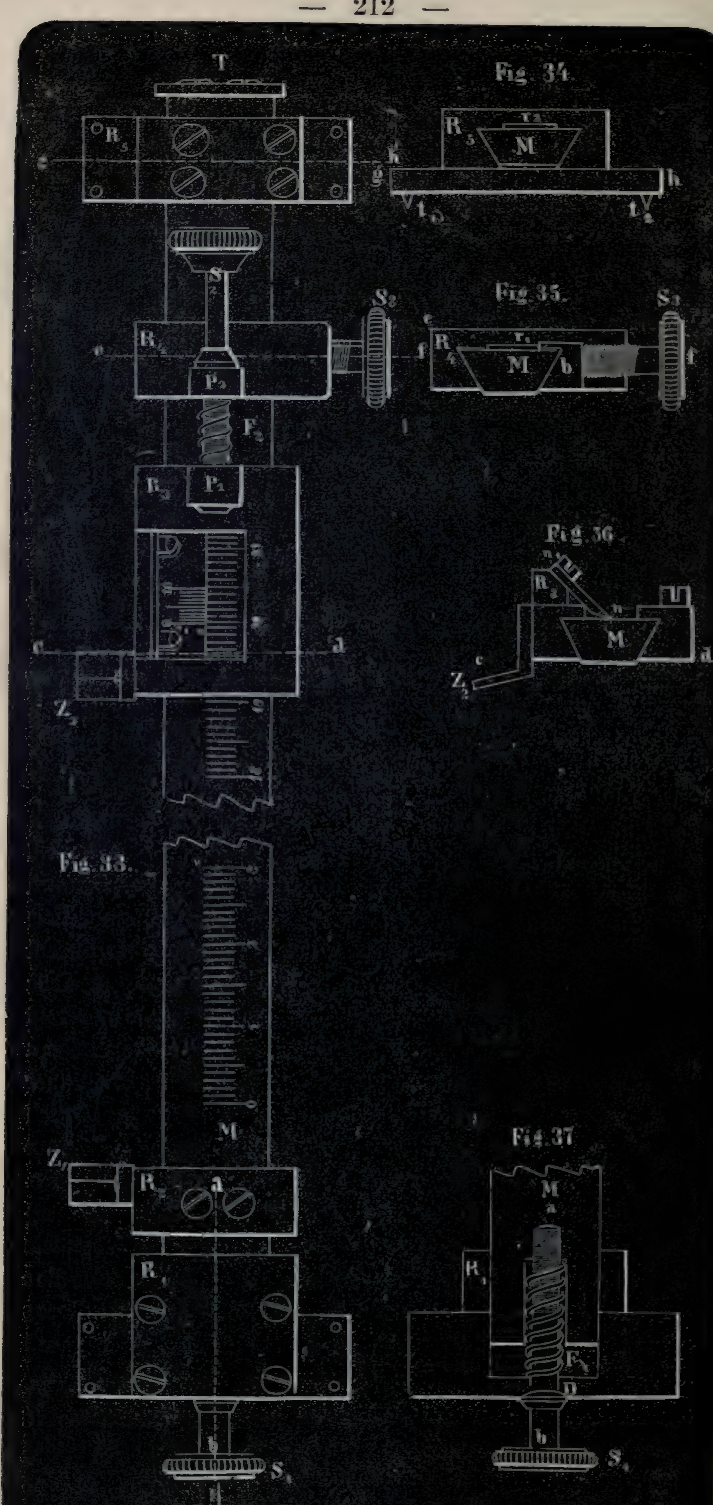
Da die Breite des Jahrringes in den seltensten Fällen im ganzen Umkreise gleich, sondern meistens sehr wechselnd ist, so darf man sich nicht damit begnügen zur Bestimmung des Durchmesserzuwachses die Jahrringbreite nur an einer Stelle zu messen, sondern man muß diese Messung an einer größeren Anzahl von Stellen wiederholen und aus diesen Messungen das Mittel nehmen.

Hätte man z. B. an einer 38jährigen Kiefer die Differenz des 38= und 33jährigen Durchmessers an vier Punkten gleich 8,5 — 13,5 — 9,5 — 12,0 Millimeter gefunden, so hätte man als durchschnittliche Breite dieser fünf Jahresringe (8,5 + 13,5 + 9,5 + 12,0) : 4 = 43,5 : 4 = 10,9 Millimeter anzunehmen.

2. Instrumente zur Messung des Durchmesserzuwachses. Zur Messung des Durchmesserzuwachses bedient man sich bei weniger genauen Untersuchungen eines in Millimeter getheilten Maßstabes, dessen Querschnitt ein rechtwinkeliges Dreieck ist. Die Hypotenusenebene dieses dreiseitigen Prisma trägt die Theilung. Beim Messen des Zuwachses (der Jahrringbreiten) legt man sodann diesen Maßstab mit der unteren Kathetenebene auf die geglättete Querfläche und mißt die Breiten der einzelnen Jahrringe, indem man die Bruchtheile der Millimeter schätzt.

Zu genaueren Arbeiten, bei welchen in der Angabe der Durchmesser oder Jahrringbreiten eine Sicherheit von 0,1 Millimeter gefordert wird, bedient man sich eines sogenannten Scheerenmaßstabes. Derselbe ist eine etwas modificirte Kluppe und besteht aus einem etwa 30 Cent langen messingenen Maßstabe M (Fig. 33. bis 37.) mit paralleltrapezischem Querschnitte, dessen parallele Seiten 15 und 8 Millimeter und dessen Höhe 5,5 Millimeter messen. Die breiteste der parallelen Seiten ist nach oben gekehrt und mit einer bis auf halbe Millimeter ausgeführten Theilung versehen. An diesem Maßstab ist eine Platte R_2 aufgeschraubt, welche vorn mit einem stählernen nach innen zugeschärften Zeiger Z_1 versehen ist. Außerdem befinden sich an dem Maßstabe zwei Schieber R_3 und R_4. Der erste derselben R_3 trägt an seiner vorderen Seite einen zweiten gleichfalls nach innen zugeschärften Zeiger Z_2, dessen innerer scharfer Rand genau an den gleichgestalteten des Zeigers Z_1 paßt. Die Vorderränder dieser beiden Zeiger sind überdies dem Maßstabe parallel

*) Preßler schlägt zu diesem Zwecke Eisenchlorid und mit Anilin roth gefärbten Weingeist vor. Nobbe fand, nach einer mündlichen Mittheilung, eine wässerige Lösung von braunem Anilin sehr empfehlenswerth.


Fig. 33.
Fig. 34.
Fig. 35.
Fig. 36.
Fig. 37.

gefeilt. Auf seiner Oberseite ist dieser Schieber R_3 mit einem rechteckigen Ausschnitte versehen und in letzterem ist ein etwa unter 35 Grad gegen die Ebene des Maßstabes geneigter Nonius nn_1 so angebracht, daß, wenn die zugeschärften Innenränder der Zeiger Z_1 und Z_2 sich berühren, sein Nullpunkt mit demjenigen der Maßstabtheilung zusammenfällt. Da 9 Theile des Maßstabes gleich 10 Theilen des Nonius sind, und ersterer bis auf halbe Millimeter getheilt ist, so ist die Angabe des Nonius $\frac{0,5}{10}$ oder $\frac{1}{20}$stel Millimeter. Ferner ist dieser Schieber R_3 nach oben in einen prismatischen Fortsatz P_1 verlängert, in welchem die Spitze einer Mikrometerschraube S_2, deren glatter Hals zugleich durch ein eben solches Prisma P_2 des Schiebers R_4 geht, steckt. Um die beiden Schieber R_3 und R_4 scharf aus einanderzuhalten und einen etwaigen todten Gang der Mikrometerschraube aufzuheben, ist die letztere in dem Raume P_1 und P_2 mit einer Spiralfeder F_2 umgeben. An der Rückseite des Schiebers R_4 befindet sich ferner eine Schraube S_3, welche eine Bremsplatte b (Fig. 35.) gegen den Maßstab zu drücken vermag. Ist diese Schraube geöffnet, so lassen sich beide Schieber R_3 und R_4 zusammen leicht mit der Hand bewegen und auf einen beliebigen Punkt einstellen. Um diese Einstellung auf's Schärfste auszuführen, schließt man die Bremsschraube S_3 und dreht die Mikrometerschraube S_2, wodurch dann auch dem Schieber R_3 eine feine Bewegung ertheilt wird.

Das hintere Ende des Maßstabes steckt in einem Schieber R_5, welcher sich leicht mit der Hand bewegen läßt. Derselbe ist zum Feststellen an seiner Unterseite mit Spitzen (t_1, t_2 Fig. 34.) versehen, welche in das Holz eingedrückt werden können. Um sein Herabgleiten vom Maßstabe M zu verhüten, ist dieser letztere mit einer Platte T, von gleichem Querschnitte wie der Maßstab, nur denselben überall um 1 Millimeter überragend, geschlossen.

Das vordere Ende des Maßstabes M befindet sich in einem Metallprisma R_1, das auf der Unterseite gleichfalls mit Spitzen versehen ist, um in das Holz eingedrückt werden zu können. Ueberdies steckt in dem Ende des Maßstabes eine Mikrometerschraube S_1, welche auch das Prisma R_1 bei D (Fig. 37.) durchbohrt. Wegen ihres bei D erweiterten glatten Halses vermag sie sich im Prisma jedoch nur zu drehen, ohne ihren Ort verändern zu können. Durch die Bewegung dieser Schraube erleidet daher nur der Maßstab M eine kleine Verschiebung, so daß der zugeschärfte Innenrand des ersten Zeigers genau auf einen bestimmten Punkt eingestellt werden kann. Um den Maßstab M

und das Prisma R_1 scharf auseinander halten und dadurch den todten Gang der Mikrometerschraube S_1 aufheben zu können, ist auch diese letztere mit einer Spiralfeder F_1 umwunden.

Um die Theilung zu schonen und die Reibung zu vermindern, sind die Schieber R_3, R_4, R_5 über der Theilung mit einem Ausschnitte r_1, r_2 versehen (Fig. 35. und 34.).

Sollen nun mit diesem Instrumente auf einer Stammscheibe Durchmesser oder Jahrringbreiten gemessen werden, so glättet man die Scheibe, zieht auf derselben in der Richtung der zu messenden Durchmesser feine Bleilinien und setzt das Instrument unmittelbar auf die Scheibe, wenn deren Größe dies erlaubt, so daß die dem Maßstabe parallelen Vorderränder der Zeiger an die Bleilinien stoßen und der erste Zeiger nahezu mit dem Anfangspunkte der Messung zusammenfällt. Sodann bringt man unter Gebrauch einer Handlupe durch die Mikrometerschraube S_1 den Innenrand des Zeigers Z_1 genau an den Anfangspunkt der Messung, öffnet hierauf die Bremsschraube S_3 und führt, zuerst durch Verschiebung mit der Hand nahezu, dann durch die Mikrometerschraube S_2 genau, den zweiten Zeiger Z_2 auf die Grenzen der Jahresringe, deren Abstand vom Anfangspunkte man kennen lernen will, und liest die Größe dieses Abstandes am Maßstab und Nonius bis auf $^1/_{20}$ Millimeter ab.

Befindet sich der Anfangs- oder Endpunkt der Messung am Rande der Scheibe, so muß man die Prismen R_1 oder R_5 auf ein neben die Scheibe gelegtes Holzstück von gleicher Höhe wie die letztere setzen und eindrücken. Ist jedoch der Durchmesser der zu untersuchenden Scheibe kleiner als die getheilte Länge des Maßstabes M, so stellt man die Scheibe in den kreisförmigen Ausschnitt eines Brettes, bringt beide Oberflächen, die des Brettes und der Scheibe, durch Unterschieben von Holzkeilchen in eine Ebene, setzt die Schieber R_1 und R_5 auf das Brett und verfährt nun wie vorher. Noch zweckmäßiger ist es das Brett mit drei Stellschrauben versehen zu lassen, um dessen Oberfläche mit dem der Scheibe in eine Ebene bringen zu können.

Ueberdies, besonders bei kleineren Objecten, ist es nicht nöthig, den ersten Zeiger mit dem Anfangspunkte der Messung zusammenfallen zu lassen. Man kann denselben vielmehr beliebig ein Stück vor den Anfangspunkt der Messung bringen, muß aber dann den zweiten Zeiger Z_2 auf diesen Punkt einstellen und die Theilung ablesen. Durch Subtraction dieser ersten Einstellung von allen übrigen müssen natürlich dieselben Resultate erhalten werden wie bei dem ersten Verfahren.*)

---

*) Das hier beschriebene Instrument, der forstlichen Versuchsstation zu

§. 47.

Die Berechnung des Flächenzuwachses.

Die Kenntniß der Zunahme des Durchmessers während eines oder mehrerer Jahre, d. h. das Maß der Breite eines oder mehrerer Jahrringe gewährt noch gar kein Urtheil über die Größe des Flächenzuwachses, d. h. über die Größe der Fläche, welche auf irgend einem, in einer gewissen Höhe des Schaftes dem letzteren entnommenen Querschnitte von einem oder mehreren Jahrringen gebildet wird. Hierzu gehört noch die Kenntniß der absoluten Größe des Durchmessers derjenigen Fläche, um welche sich der zu untersuchende Jahresring angelegt hat.

Kann man diese Baumquerfläche als kreisförmig voraussetzen, so ist, wenn deren Durchmesser gleich D, deren Inhalt $\frac{\pi}{4}D^2$; ist ferner der Durchmesserzuwachs gleich $\triangle$, so ist der Inhalt der Kreisfläche vom Durchmesser $D + \triangle$ gleich $\frac{\pi}{4}\left(D + \triangle\right)^2$, der Flächenzuwachs beträgt mithin

$$\Gamma = \frac{\pi}{4}\left(D + \triangle\right)^2 - \frac{\pi}{4}D^2$$

oder

$$\Gamma = \frac{\pi}{4}\left(2D\triangle + \triangle^2\right).$$

Bezeichnet man die zum Durchmesser D gehörige Kreisfläche mit G_D, so kann man für die letztere Gleichung auch schreiben

$$\Gamma = G_{\sqrt{2D\triangle}} + G_{\triangle}.$$

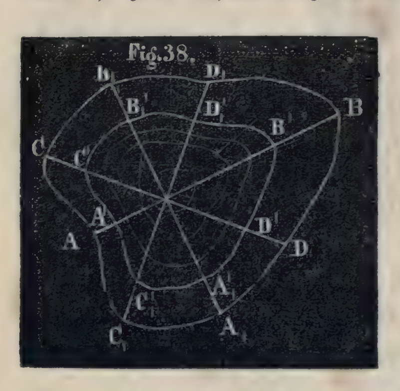
Wäre z. B. der Durchmesser einer Stammscheibe jetzt 25,8 Cent, und betrüge die Breite der letzten fünf Jahresringe 1,9 Cent, so wäre $D + \triangle = 25{,}8$, $\triangle = 1{,}9$, also $D = 25{,}8 - 1{,}9 = 23{,}9$ Cent, somit der Flächenzuwachs während der letzten fünf Jahre, da $\sqrt{2 \cdot 25{,}8 \cdot 1{,}9} = \sqrt{98{,}04} = 9{,}9$, gleich

$$\Gamma = K_{9,9} + K_{1,9} = 76{,}977 + 2{,}835 = 79{,}812 \text{ Quadratcent.}$$

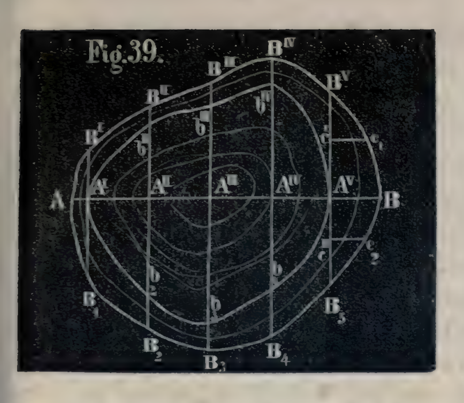
Sind, wie es fast immer, besonders in den unteren Stammtheilen der Fall ist, die Querflächen elliptisch oder selbst ganz unregelmäßig geformt, so muß zur Berechnung dieser Flächen eins der beiden folgenden Verfahren Platz greifen.

Tharand gehörig, ist aus der Werkstätte von Staudinger & Comp. in Gießen hervorgegangen. Ein ähnliches Instrument, aus derselben Werkstätte, hat Eduard Heyer in seinem schon mehrfach erwähnten Werkchen „Ueber Messung der Höhen sowie der Durchmesser 2c." S. 73. u. f. beschrieben und Taf. III. Fig. 18. bis 20. abgebildet.

Bei dem einen, zwar viel gebrauchten aber wenig strengen Verfahren zieht man sich auf der Scheibe, welche man untersuchen will, eine größere Zahl Durchmesser, von welchen sich immer je zwei rechtwinkelig schneiden und welche unter einander am Durchschnittspunkte nahe gleiche Winkel bilden (Fig. 38.). Dann mißt man durch einen aufgelegten Maßstab nicht allein die absolute Größe der jetzigen rindenlosen Durchmesser AB, $A_1 B_1$ — CD, $C_1 D_1$, sondern auch diejenige von $A'B'$, $A'_1 B'_1$ — $C'D'$, $C'_1 D'_1$, welche Durchmesser der um m Jahre jüngeren Fläche angehören. Das Mittel aus den ersteren nimmt man als die Größe des Durchmessers einer Kreisfläche an, welche der Stammscheibe $A C B_1 D_1$ $B D A_1 C_1$ gleichflächig ist; ebenso soll das Mittel aus $A'B' + A'_1 B'_1 + \ldots$ den Durchmesser einer Kreisfläche bilden, welche mit $A' C' B'_1 D'_1$ $B' D' A'_1 C'_1$ flächengleich ist. Hätte man z. B. $AB = 35{,}8$, $A_1 B_1 = 33{,}2$, $CD = 33{,}5$, $C_1 D_1 = 32{,}9$ Cent gefunden, so wäre der mittlere Durchmesser der Fläche $A C B_1 D_1$ $B D A_1 C_1$ gleich $\frac{1}{4}\left(35{,}8 + 33{,}2 + 33{,}5 + 32{,}9\right) = \frac{135{,}4}{4} = 33{,}85$ Cent. Aus den Messungen $A'B' = 23{,}4$, $A'_1 B'_1 = 21{,}9$, $C'D' = 22{,}2$, $C'_1 D'_1 = 21{,}7$ Cent würde dagegen der mittlere Durchmesser der Fläche $A' C' B'_1 D'_1$ $B' D' A'_1 C'_1$ zu $\frac{1}{4}\left(23{,}4 + 21{,}9 + 22{,}2 + 21{,}7\right) = \frac{89{,}2}{4} = 22{,}30$ Cent folgen. Der Durchmesserzuwachs würde daher $33{,}85 - 22{,}30 = 11{,}55$ Cent betragen und der Flächenzuwachs gleich $k_{33,85} - k_{22,30}$ oder, weil $\sqrt{2 \cdot 22{,}30 \cdot 11{,}55} = \sqrt{515{,}12} = 22{,}70$, gleich $k_{22,70} + k_{11,55}$ sein. Aus der ersten Formel folgt der Flächenzuwachs gleich 509,356 Quadratcent, aus der zweiten gleich 509,482 Quadratcent.



Will man genauer rechnen, so muß man das folgende oder ein dem ähnliches Verfahren einschlagen. Man zieht auf der geglätteten Stammscheibe einen Durchmesser AB (Fig. 39.), so daß derselbe die frühere Fläche, welche dem um m Jahre jüngeren Baume zukommt, in ihrer größten Breite $A^I A^V$ durchschneidet, und errichtet in den Punkten A^I und A^V die Senkrechten $B^I A^I B_1$ und $B^V A^V B_5$, welche daher Tangenten an der inneren Fläche in den Punkten A^I und A^V bilden werden. Theilt man sodann die Strecke $A^I A^V$ in eine Anzahl gleiche Theile und



zieht durch diese Theilpunkte Senkrechte zu AB, so werden diese den Umfang der äußeren Fläche oberhalb in B^{II}, B^{III}, B^{IV}, unterhalb in B_2, B_3, B_4, den der früheren Fläche in b^{II}, b^{III}, b^{IV} und b_2, b_3, b_4 treffen. Dann kann man die innere Fläche und das Flächenstück der äußeren Fläche $B_1\ A^I\ B^I\ B^V\ A^V\ B_5$ nach Simpson's Regel, die beiden Abschnitte $B_1 A B^I$ und $B^V B B_5$ aber, da sie meistens nur wenig ausgedehnt sein werden, als Parabelsegmente berechnen. Sollten diese Abschnitte einmal einen größeren Raum einnehmen, so kann man $B^I B_1$ und $B^V B_5$ als Abscissenaxen betrachten, darauf einige Ordinaten errichten und mit deren Hülfe den Inhalt dieser Abschnitte gleichfalls nach Simpson's Formel finden.

Wäre $B^I\ B_1 = y_1 = 16{,}7$ Cent
$B^{II}\ B_2 = y_2 = 28{,}3$ „ $\quad b^{II}\ b_2 = \eta_2 = 23{,}2$ Cent,
$B^{III} B_3 = y_3 = 34{,}4$ „ $\quad b^{III} b_3 = \eta_3 = 28{,}5$ „
$B^{IV} B_4 = y_4 = 37{,}7$ „ $\quad b_{IV}\ b_4 = \eta_4 = 27{,}6$ „
$B^V\ B_5 = y_5 = 27{,}1$ „

$$A^I A^{II} = A^{II} A^{III} = A^{III} A^{IV} = A^{IV} A^V = \frac{1}{4}\ A^I\ A^V = x = 8{,}7$$

Cent und endlich $AA^I = 2{,}5$ und $A^V B = 7{,}1$ Cent und bezeichnet man die Fläche $AB^I..B^I...B_I$ mit G, die Fläche $A^I b^{II}..A^V b_2$ mit g, so wird

$$G = \frac{1}{3}\left[y_1 + y_5 + 4\,(y_2 + y_4) + 2 y_3\right] x$$
$$+ \frac{2}{3}\left(y_1 \cdot AA^I + y_5\ A^V B\right),$$
$$g = \frac{1}{3}\left[4\,(\eta_2 + \eta_4) + 2\eta_3\right] x.$$

Führt man in diese beiden Formeln die oben gegebenen Zahlwerthe ein, so wird $G = 1248{,}24$ Quadratcent, $g = 753{,}42$ Quadratcent. Da der zweite Abschnitt $B^V B B_5$ hier ziemlich groß ist, so kann man noch die Ordinate $B^V\ B_5$ in vier Theile, jeden von 6,9 Cent Länge, theilen, in den Theilpunkten Ordinaten (von 5,8, 7,7 und 5,0 Cent Länge) errichten, und erhielte dann für die Fläche dieses Segmentes

$$\left[4 \cdot (5{,}8 + 5{,}0) + 2 \cdot 7{,}7\right] 6{,}9 = 133{,}78 \text{ Quadratcent.}$$

Die Fläche G würde somit um 133,78 — 128,27 = 5,51 Quadratcent zu vergrößern sein und ihr Inhalt also zu 1248,24 + 5,51 = 1253,75 Quadratcent gefunden werden. Der Flächenzuwachs betrüge darnach 1253,75 — 753,42 = 500,33 Quadratcent.

Die Ermittelung des Flächenzuwachses ist, wenn sie genau sein soll, nach diesem Verfahren äußerst zeitraubend und deshalb darnach kaum ausführbar. Dagegen gelangt man mit dem Amsler'schen Polarplanimeter sehr rasch und sicher zur Kenntniß der Größe der Baumquerflächen, wenn man dieses Instrument, anstatt mit einem Fahrstifte, mit einem Fahrgläschen versieht. Auf großen Scheiben findet das Planimeter unmittelbar Platz; für kleinere ist aber noch eine mit drei Stellschrauben versehene Ebene (eine mit Zeichnenpapier überzogene Holztafel) nöthig. Auf dieser Tafel erhalten der Pol und die Laufrolle ihren Platz und können durch die Stellschrauben mit der Oberfläche der Scheibe in eine Ebene gebracht werden.*) Bei Nadelhölzern kann man auf den geglätteten Scheiben die Jahrringgrenzen meistens ohne Weiteres umfahren; bei Laubhölzern, wo diese Grenzen häufig wenig ausgeprägt sind, muß man dieselben vor dem Umfahren mit einem scharfen Bleistifte kenntlich machen. Frische Nadelholzscheiben reibt man, um das Instrument nicht mit Harz zu verunreinigen, vor Beginn der Arbeit mit Spiritus ab.

Die mit dem Polarplanimeter auf Baumquerflächen zu erreichende Genauigkeit wird am besten durch die folgenden Zahlen gekennzeichnet werden.

Eine 25malige Umfahrung ergab für eine Scheibe (Fichte) 141,636 Quadratcent Flächeninhalt. Je fünf Umfahrungen lieferten

141,38 — 141,56 — 141,60 — 141,82 — 141,82 Quadratcent;

die größten Abweichungen dieser Zahlen vom obigen Mittel sind —0,256 und +0,184 Quadratcent oder —0,18 und +0,13 Procent. Die kleinste Einzelmessung ergab die Fläche zu 140,8, die größte zu 142,5 Quadratcent, so daß die größten Abweichungen vom Mittel —0,836 und +0,864 Quadratcent oder —0,59 und +0,61 Procent betragen. Die Dauer jeder Umfahrung war im Mittel 1,1 Minute.

Die 20malige Umfahrung einer zweiten Scheibe (Fichte) ergab deren Flächeninhalt zu 93,79 Quadratcent, während aus je fünf Umfahrungen

93,46 — 93,54 — 93,92 — 94,24 Quadratcent

erhalten wurden. Die größten Abweichungen dieser Zahlen vom Mittel sind — 0,33 und + 0,45 Quadratcent oder — 0,35 und

---

*) Das Polarplanimeter und die erwähnte verstellbare Ebene werden in vorzüglicher Güte vom Hofmechanikus Ausfeld in Gotha gefertigt.

+ 0,48 Procent. Die kleinste Einzelmessung ergab für die Fläche der Scheibe 92,5, die größte 94,5 Quadratcent, also − 1,29 und + 0,71 Quadratcent oder − 1,38 und + 0,76 Procent Abweichung vom Mittel. Die Dauer jeder Umfahrung betrug im Mittel 0,9 Minuten.

§. 48.
Die Berechnung des Massenzuwachses gefällter Stämme.

1. Die Ermittelung des Massenzuwachses gefällter Stämme geschieht dadurch, daß man sich je nach dem Grade der Genauigkeit, welche man zu erreichen wünscht, den Stamm in eine größere oder kleinere Anzahl Sectionen theilt, und auf jeder Schnittfläche nach mehreren Richtungen hin sowohl die Größen der jetzigen als auch der um m Jahre jüngeren Durchmesser ermittelt. Aus diesen Zahlen nimmt man die Mittel und erhält in denselben die Durchmesser der Kreisflächen in den zu untersuchenden Altersstufen. Seien diese Mittel für die Durchmesser der äußeren Flächen D_0, D_1 .... D_n, die diesen Durchmessern zugehörigen Kreisflächen G_0, G_1 ... G_n, sei die Länge der Sectionen l und die der überschießenden Spitze l_1, so ist das Volumen des jetzigen Stammes (§. 15).

$$V_n = \frac{1}{2}\left[G_0 + 2\,(G_1 + G_2 + \,.\,.\, + G_{n-1}) + G_n\right] l + \frac{1}{2}\, G_n l_1.$$

Umfaßt nun die Periode, deren Zuwachs man bestimmen will, m Jahre, so kann man, wie schon erwähnt, bei Nadelhölzern, welche den jährlichen Längenzuwachs durch die Astquirle erkennen lassen, m solcher Astquirle zurückzählen und dadurch die Länge des m Jahre jüngeren Stammes unmittelbar erhalten. Wo dieses Hülfsmittel aber nicht anwendbar ist, muß man sich mit einer Interpolation begnügen. Hat nämlich eine Schnittfläche mehr, die darauf folgende weniger als m Jahre, so muß die Spitze des um m Jahre jüngeren Stammes in der von diesen beiden Flächen begrenzten Section liegen und die Länge l_i des Spitzenstückes des um m Jahre jüngeren Stammes, welche in dieser Section enthalten ist, wird sich meistens genügend genau auf die unten bei dem Rechnungsbeispiele gezeigte Weise finden lassen.

Ist nun G_q die letzte Querfläche, welche mehr als m Jahresringe enthält, l_i die durch Interpolation gefundene Länge des Spitzenstückes des inneren Stammes, und bezeichnen G'_0, G'_1 ... G'_q die Querflächen der einzelnen Sectionen des Innenstammes, so ist das Volumen desselben

$$V = \frac{1}{2}\left[G'_0 + 2\,(G'_1 + G'_2 + \ldots + G'_{q-1}) + G'_q\right] l + \frac{1}{2}\,G'_q\, l_i.$$

Der Massenzuwachs Υ während m Jahre wird dann durch die Differenz $V_n - V$ erhalten.

Statt die Durchmesser der Endflächen der Sectionen zu messen, kann man diese Messungen auch an den Mittenflächen derselben vornehmen. Bezeichnen nun $\gamma_1, \gamma_2, \ldots \gamma_n$ diese Mittenflächen für den äußeren, $\gamma'_1, \gamma'_2, \ldots \gamma'_q$ für den inneren Stamm, l die Länge der Sectionen, G_{n+1} die obere Endfläche der letzten Section des äußeren Stammes und l_1 die überschießende Spitze, G_{q+1} die obere Endfläche der letzten Section des inneren Stammes und l_i die interpolirte Länge der Spitze, so ist der Massengehalt des äußeren Stammes

$$V_n = \left(\gamma_1 + \gamma_2 + \ldots + \gamma_n\right) l + \frac{1}{2}\,G_{n+1}\, l_1,$$

der des inneren

$$V = \left(\gamma'_1 + \gamma'_2 + \ldots + \gamma'_q\right) l + \frac{1}{2}\,G_{q+1}\, l_i.$$

Die Differenz $V_n - V$ beider Stämme ergiebt wieder den mjährigen Massenzuwachs.

Sollte es nicht gestattet sein den Stamm zu zerlegen, so muß man demselben mit dem unten zu beschreibenden Zuwachsbohrer an den Enden oder in der Mitte der Sectionen Bohrspäne entnehmen und an diesen die Dicke der Rinde (r) und die Breite der letzten m Jahresringe (△) messen. Bestimmt man dann mit der Kluppe den jetzigen berindeten Durchmesser D, so ist $D - r$ der jetzige, $D - r - \triangle$ der frühere rindenlose Durchmesser.

Als Beispiele mögen folgende, an einer Kiefer vorgenommene Messungen dienen. Dieselbe wurde vom Boden ab in Sectionen von 0,9 Meter Länge getheilt und an jedem Theilpunkte eine Scheibe ausgeschnitten. Auf jeder dieser Scheiben wurden zwei sich rechtwinkelig durchschneidende Durchmesser gemessen, und zwar sowohl die des jetzigen als die des um fünf Jahre jüngeren Stammes. Von dem äußeren Stamme blieb außerdem noch eine 2,6 Meter lange Spitze übrig, so daß dessen Gesammtlänge 15,2 Meter betrug. Die Messungen selbst gehen aus der folgenden Uebersicht hervor.

Ordnungsnummer der Querfläche.	Zahl der Jahrringe.	Durchmesser der äußeren Querfläche. Cent.	Durchmesser der inneren Querfläche. Cent.	Ordnungsnummer der Querfläche.	Zahl der Jahrringe.	Durchmesser der äußeren Querfläche. Cent.	Durchmesser der inneren Querfläche. Cent.
1	38	23,28	21,10	9	22	14,48	12,90
2	35	21,00	18,73	10	21	14,13	12,50
3	33	19,55	17,50	11	18	13,53	10,67
4	30	18,70	16,63	12	17	10,55	8,23
5	28	18,70	16,50	13	16	9,43	7,00
6	27	17,70	15,70	14	13	5,55	3,83
7	25	17,48	15,28	15	3	3,88	·
8	24	16,38	14,45				

Da der Massenzuwachs der letzten fünf Jahre bestimmt werden soll, so muß zuerst der Ort der Spitze des um fünf Jahre jüngeren Baumes aufgesucht werden. Derselbe muß aber zwischen der 14. und 15. Querfläche liegen. Da die erstere 13, die zweite 3 Jahrringe enthält, so beträgt der durchschnittliche Längenzuwachs eines Jahres in dieser Zeit 0,9 : 10 = 0,09 Meter, derjenige für 13 — 5 = 8 Jahre also 0,72 oder 0,7 Meter. Die zwischen dem 14. und 15. Querschnitte eingeschlossene Spitze des um fünf Jahre jüngeren Baumes wird daher in dieser Section ungefähr 0,7 Meter lang sein.

Der Inhalt des äußeren Stammes bestimmt sich dann zu 0,251298 Cubicmeter, der des inneren zu 0,189687 Cubicmeter, so daß an diesem Baume der Massenzuwachs der letzten fünf Jahre 0,251298 — 0,189687 = 0,061611 Cubicmeter beträgt.

Derselbe Baum mag noch als Beispiel dafür dienen, wenn die Durchmesser der Mittenflächen der Sectionen gemessen werden. Dann gehen die Querflächen 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14 beim äußeren und 2, 4, 6, 8, 10, 12 beim inneren Stamm in die Rechnung ein. Dem äußeren Stamm ist als Spitzenstück noch $\frac{1}{2} \cdot G_{3,88} \cdot 2,6$, dem zweiten oder inneren $\frac{1}{2} G_{7,00} \cdot 1,6$ zuzufügen. Unter Zurechnung dieser Stücke erhält man für die beiden Stämme 0,245392 und 0,187801 Cubicmeter Inhalt, als Massenzuwachs daher 0,245392 — 0,187801 = 0,057591 Cubicmeter.

Wenn man sich mit einer geringeren Genauigkeit zufrieden geben kann, so wird es zureichend sein die Volumina des äußeren und inneren Stammes aus den Mittenstärken und Längen zu

berechnen. Wären die Mittenstärken der beiden obigen Stämme 14,32 und 14,54 Cent und die Längen 15,2 und 12,4 Meter, so wären darnach die Inhalte dieser Stämme 0,244805 und 0,205892 Cubicmeter, der Massenzuwachs somit 0,244805 — 0,205892 = 0,038913 Cubicmeter.

Dieses letztere Verfahren, das immer noch die Ermittelung der Durchmesser des äußeren und inneren Stammes an zwei verschiedenen Punkten, den Mitten des jetzigen und früheren Stammes, voraussetzt, leidet hauptsächlich an dem Fehler, daß, wenn die Periode, auf welche sich die Zuwachsuntersuchung erstreckt, nicht sehr kurz ist, die Formzahl des äußeren, von der des inneren Stammes ziemlich abweichend sein kann; und zwar wird mit seltenen Ausnahmen von innen nach außen immer eine Formzahlzunahme stattfinden. Wenn daher die Cubirungsformel $V = \gamma H$ auch für den einen der beiden Stämme brauchbare Resultate liefert, so wird sie es für den anderen natürlich viel weniger thun.

Um diesen Einfluß der Formzahländerung zu compensiren und um auch die Arbeit noch mehr zu vereinfachen, hat Preßler folgendes Näherungsverfahren*) angegeben. Man entwipfele den zu untersuchenden Stamm da, wo beim Beginn der Zuwachsperiode die Spitze des Baumes sich befand, welche Stelle, wie schon mehrfach erwähnt, durch Zurückzählen von m Jahrestrieben aufgefunden werden kann, durchschneide dann den „zuwachsrecht“ entwipfelten Stamm in seiner Mitte und messe auf der Schnittfläche den Durchmesser der jetzigen Querfläche sowohl als der früheren. Ist der Durchmesser der ersteren δ_n, der der zweiten δ, so sind die Volumina der beiden Stämme $\frac{\pi}{4}\delta^2_n H$ und $\frac{\pi}{4}\delta^2 H$, der Massenzuwachs also $\frac{\pi}{4}\left(\delta_n{}^2 - \delta^2\right)H$.

Ist $\delta_n = 16{,}50$, $\delta = 14{,}54$ Cent, $H = 12{,}4$ Meter, so wird der Massenzuwachs 0,265143 — 0,205892 = 0,059251 Cubicmeter.

Die Masse der mjährigen Spitze bleibt bei diesem Verfahren ganz außer Rechnung, was bei dem im Verhältnisse zur Masse des ganzen Stammes nur geringen Betrage derselben auch ohne großen Fehler geschehen kann. Ueberdies wird diese Vernachlässigung, so wie die Formzahlzunahme dadurch verbessert, daß die Mittenfläche des äußeren Stammes bei diesem Verfahren durch den Wegfall der Spitze weiter herabrückt, also größer wird. Denn während der Mittendurchmesser des äußeren Stammes in der wirklichen Mitte 14,32 Cent beträgt, beträgt er nach der zuwachsrechten

*) Neue holzwirthschaftliche Tafeln, S. 198.

Entwipfelung 16,50 Cent. Der aus den wirklichen Mittenflächen gefundene Massenzuwachs ist 0,038913 Cubicmeter, der aus den zuwachsrechten Mittenflächen erhaltene dagegen 0,059251 Cubicmeter. Die Abweichung von dem aus der Sectionscubirung erhaltenen beträgt daher im ersten Falle — 0,022698 Cubicmeter, im zweiten 0,002360 Cubicmeter oder den zehnten Theil der ersten. Statt den Stamm zu zerschneiden, kann man demselben durch den weiter unten in §. 52. zu beschreibenden Zuwachsbohrer Bohrspäne an wenigstens zwei einander diametral gegenüberstehenden Punkten entnehmen, so dann mit der Kluppe den berindeten Durchmesser des jetzigen Stammes messen und aus dieser Größe, der Dicke der Rinde und der Breite der letzten m Jahresringe den rindenlosen Durchmesser des jetzigen und früheren Stammes bestimmen.

§. 49.
Die Berechnung der Zuwachsprocente.

Die Ermittelung der absoluten Größe des Zuwachses ist zwar für manche Fälle unumgänglich nöthig, es gewährt aber diese Größe keinen oder nur einen ungenügenden Ueberblick über den Gang des Zuwachses während der verschiedenen Lebensperioden der Bäume und Bestände, ja sie kann sogar dem mit der Natur des Zuwachsganges der Holzarten nicht sehr Vertrautem zu Trugschlüssen Veranlassung geben. Um sich vor solchen zu bewahren, muß man nicht die absolute Größe des Zuwachses, sondern das Zuwachsprocent ins Auge fassen. Man muß nämlich den Durchmesser, die Querfläche oder den Stamminhalt zu einer gewissen Zeit als eine zinstragende Anlage, als ein Kapital ansehen, und den Durchmesser-, Flächen- oder Massenzuwachs in einer gewissen Zeit als die Zinsen desselben betrachten, den um den Zuwachs vergrößerten Durchmesser, Flächen- und Massengehalt aber als den Nachwerth dieses Kapitales. Dann ist die Frage zu beantworten, zu welchem Zinsfuß dieses Kapital ausgeliehen, d. h. mit welchem Procent der Durchmesser, Flächen- und Massengehalt zugewachsen ist.

Auf diese Frage giebt uns die Zinsrechnung Antwort, welche aus den vier Größen Kapital, Nachwerth, Procent und Zeit eine derselben zu berechnen lehrt, wenn die drei übrigen gegeben sind. Bekanntlich lautet aber die Fundamentalgleichung der Zinsrechnung

$$k_n = k\left(1 + \frac{p}{100}\right)^n = k \cdot 1,\, op^n,$$

worin k den jetzigen Werth des Kapitales, k_n den Nachwerth desselben, p den Zinsfuß, n die Zeit bedeuten. Sieht man in

dieser Gleichung je drei der darin enthaltenen vier Größen als bekannt, die vierte als unbekannt an, so erhält man vier Gleichungen für k_n, k, p und n. Und zwar wird nach einigen leichten Umformungen

$$k_n = k\left(1 + \frac{p}{100}\right)^n = k \cdot 1,op^n \quad . \quad . \quad . \quad 1)$$

$$k = k_n \frac{1}{\left(1 + \frac{p}{100}\right)^n} = k_n \frac{1}{1,op^n} \quad . \quad . \quad . \quad 2)$$

$$p = \left(\sqrt[n]{\frac{k_n}{k}} - 1\right) 100 \quad . \quad . \quad . \quad 3)$$

$$n = \frac{\log k_n - \log k}{\log\left(1 + \frac{p}{100}\right)} = \frac{\log k_n - \log k}{\log 1,op} \quad . \quad . \quad . \quad 4)$$

Betrachtet man k_n als gegenwärtigen Werth des Kapitales, so wird k dessen Vorwerth (k_v) und die Gleichung 2) geht dann über in

$$k_v = k \frac{1}{\left(1 + \frac{p}{100}\right)^n} = k \frac{1}{1,op^n} \quad . \quad . \quad . \quad 2^a)$$

Die Größe $\left(1 + \frac{p}{100}\right)^n$ oder $1,op^n$ nennt man bekanntlich den Nachwerthsfactor (N_n), die Größe $\frac{1}{\left(1 + \frac{p}{100}\right)^n} = \frac{1}{1,op^n}$ den Vorwerthsfactor (V_n); mit diesen Bezeichnungen hat man dann

$$k_n = k N_n,$$
$$k_v = k V_n,$$

wo man die Werthe von N_n und V_n für alle vorkommenden p und n aus den Tafeln der Nach- und Vorwerthsfactoren*) entnehmen kann.

---

*) Forstl. Hülfsbuch. Taf. 33. und 34. — Vergl. auch noch I. Bd. 3. Abth. Taf. 21. und 22. — Auch die Werthe von n und p lassen sich mit Hülfe dieser Tafeln berechnen. Denn da

$$N_n = \frac{k_n}{k}, \; V_n = \frac{k_v}{k}$$

ist, so braucht man, wenn p gegeben ist, für dieses als Argument nur die Quotienten

$$\frac{k_n}{k} \text{ und } \frac{k_v}{k}$$

in den angeführten Tafeln aufzusuchen. Der mit diesem Quotienten in derselben Horizontalreihe stehende Werth von n ist der gesuchte. Ist der Werth von

Wendet man diese Formeln auf die Ermittelung des Zuwachses an, d. h. setzt man an die Stelle von k und k_n vielmehr D und D_n, G und G_n, V und V_n, wo D, G und V die frühere, D_n, G_n, V_n die spätere, um den Zuwachs vermehrte Größe des Durchmessers, der Querfläche, des Volumens bedeuten, so erhält man

a) das Durchmesserzuwachsprocent $p_D = \left(\sqrt[n]{\frac{D_n}{D}} - 1\right) 100;$

b) das Flächenzuwachsprocent $p_G = \left(\sqrt[n]{\frac{G_n}{G}} - 1\right) 100,$

oder wenn man für G und G_n setzt $\frac{\pi}{4} D^2$ und $\frac{\pi}{4} D^2{}_n$,*)

$$p_G = \left(\sqrt[n]{\frac{D^2{}_n}{D^2}} - 1\right) 100;$$

$\frac{k_n}{k}$ und $\frac{k_v}{k}$ in den Tafeln nicht genau vorhanden, so werden sich wenigstens immer zwei Werthe angeben lassen, zwischen welchen n enthalten ist.

Aehnlich läßt sich p bestimmen, wenn n gegeben ist. Man sucht in diesem Falle die Quotienten $\frac{k_n}{k}$ oder $\frac{k_v}{k}$ für n als Argument in den Tafeln auf und findet in dem Kopfe der entsprechenden Verticalspalte das zugehörige p. Wären die Werthe der beiden Quotienten in den Tafeln nicht genau enthalten, so würden sich doch zwei Grenzwerthe angeben lassen, zwischen welchen n enthalten sein muß.

Wäre z. B. gefragt, wie lange ein Kapital stehen müsse, damit es sich bei 4 Procent Zinseszins verdoppele, so würde dic Antwort lauten: Da $k = 1$, $k_n = 2$, so ist $N_n = \frac{k_n}{k} = \frac{2}{1} = 2$. Geht man nun in der Spalte 4 % senkrecht herab, so findet man, daß der Werth 2 in derselben nicht genau vorkommt, sondern daß sich darin nur die Werthe 1,9479 und 2,0258 finden Dem ersteren entspricht ein Werth von $n = 17$, dem zweiten ein solcher von $n = 18$, d. h. ein Kapital braucht nahezu 18 Jahre um sich zu verdoppeln.

*) Ueberdies folgt, wenn das Durchmesserzuwachsprocent p_D, d. h. wenn D zu $D\left(1 + \frac{1}{100} p_D\right)$ wird,

$$p_G = \left(\sqrt[n]{\frac{D^2\left(1 + \frac{1}{100} p_D\right)^{2n}}{D^2}} - 1\right) 100 = \left(\left(1 + \frac{1}{100} p_D\right)^2 - 1\right) 100.$$

Da $\left(1 + \frac{1}{100} p_D\right)^2$ ohne merklichen Fehler gleich $1 + 2\,\frac{1}{100} p_D$ gesetzt werden kann, so folgt noch

$$p_G = 2 \cdot \frac{1}{100} p_D,$$

d. h. das Zuwachsprocent einer Fläche beträgt etwas mehr als das Doppelte des Durchmesserzuwachsprocentes derselben.

c) das Massenzuwachsprocent $p_V = \left(\sqrt[n]{\frac{V_n}{V}} - 1\right) 100.$

Hätte z. B. ein Durchmesser D von 18,73 Cent nach fünf Jahren die Größe von 21,00 Cent erreicht, so wäre das Zuwachsprocent

$$p_D = \left(\sqrt[5]{\frac{21,00}{18,73}} - 1\right) 100 = \left(1,0231 - 1\right) 100 = 2,31.$$

Als Zuwachsprocent der diesem Durchmesser entsprechenden Fläche folgt dann

$$p_G = \left(\sqrt[5]{\frac{21,00^2}{18,73^2}} - 1\right) 100 = \left(1,0468 - 1\right) 100 = 4,68.$$

Das Zuwachsprocent der in §. 47. nach Simpson's Regel berechneten Fläche würde, wenn $n = 10$, sein

$$p_G = \left(\sqrt[10]{\frac{1253,75}{753,42}} - 1\right) 100 = \left(1,0521 - 1\right) 100 = 5,21.$$

Um endlich noch das in §. 48. berechnete Beispiel zu benutzen, so würde, wenn der Inhalt eines Stammes in fünf Jahren von 0,189687 auf 0,251298 Cubikmeter gewachsen wäre, das Massenzuwachsprocent betragen

$$p_V = \left(\sqrt[5]{\frac{0,251298}{0,189687}} - 1\right) 100 = \left(1,0579 - 1\right) 100 = 5,79.$$

Wäre an Stelle der Größen D_n, G_n, V_n unmittelbar der Zuwachs oder die Differenz $D_n - D = \Delta_n$, $G_n - G = \Gamma_n$, $V_n - V = \Upsilon_n$ gegeben, so folgt, da $\frac{k_n}{k} = \frac{k_n - k}{k} + 1$,

$$p = \left(\sqrt[n]{\frac{k_n - k}{k} + 1} - 1\right) 100$$

und damit

$$p_D = \left(\sqrt[n]{\frac{\Delta_n}{D} + 1} - 1\right) 100,$$

$$p_G = \left(\sqrt[n]{\frac{\Gamma_n}{G} + 1} - 1\right) 100,$$

$$p_V = \left(\sqrt[n]{\frac{\Upsilon_n}{V} + 1} - 1\right) 100.$$

§. 50.
Fortsetzung.

Die im vorigen Paragraphen entwickelten Formeln erfordern zu ihrer Berechnung logarithmische oder andere Hülfstafeln. In

den Fällen, wo die Zuwachsperioden sehr lang sind und der Nachwerth das ursprüngliche Kapital weit überschreitet, ist aber die Benutzung dieser Formeln bei Berechnung der Größen k_n, k, p und n durchaus nothwendig. Für kleine Zeiträume dagegen, und wenn D_n, G_n, V_n nicht allzusehr von D, G, V abweichen, lassen sich mit Vortheil Näherungsformeln anwenden, zu welchen man auf folgendem Wege gelangt.

In der Gleichung

$$p = \left(\sqrt[n]{\frac{k_n}{k}} - 1\right) 100$$

läßt sich das Glied $\sqrt[n]{\frac{k_n}{k}}$ auch schreiben

$$\sqrt[n]{\frac{k + k_n - k}{k}} = \sqrt[n]{1 + \frac{k_n - k}{k}}.$$

Ist nun $k_n - k < \kappa$, so ist $\frac{k_n - k}{k} < 1$ und die Größe $\sqrt[n]{1 + \frac{k_n - k}{k}}$ darf nach dem binomischen Lehrsatze in eine Reihe entwickelt werden. Man erhält dann

$$\sqrt[n]{1 + \frac{k_n - k}{k}} = 1 + \frac{1}{n}\,\frac{k_n - k}{k} - \frac{n-1}{2n^2}\left(\frac{k_n - k}{k}\right)^2 + \ldots$$

Multiplicirt man beide Seiten dieser Gleichung mit

$1 + \frac{n-1}{2n}\,\frac{k_n - k}{k}$, so wird

$$\sqrt[n]{1 + \frac{k_n - k}{k}}\left(1 + \frac{n-1}{2n}\,\frac{k_n - k}{k}\right) = 1 + \frac{n-1}{2n}\,\frac{k_n - k}{k}$$
$$+ \frac{1}{n}\,\frac{k_n - k}{k} + \frac{n-1}{2n^2}\left(\frac{k_n - k}{k}\right)^2 - \frac{n-1}{2n^2}\left(\frac{k_n - k}{k}\right)^2$$
$$- \frac{(n-1)^2}{4n^3}\left(\frac{k_n - k}{k}\right)^3 + \ldots$$

Da die mit $\left(\frac{k_n - k}{k}\right)^2$ multiplicirten Glieder sich heben und die mit den höheren Potenzen dieser Größe behafteten vernachlässigt werden können, so bleibt nach einer leichten Reduction

$$\sqrt[n]{1 + \frac{k_n - k}{k}}\left(1 + \frac{n-1}{2n}\,\frac{k_n - k}{k}\right) = 1 + \frac{n+1}{2n}\,\frac{k_n - k}{k}.$$

Hieraus folgt

$$\sqrt[n]{1+\frac{k_n-k}{k}}=\frac{1+\frac{n+1}{2n}\,\frac{k_n-k}{k}}{1+\frac{n-1}{2n}\,\frac{k_n-k}{k}}.$$

Führt man rechts die Division aus, so erhält man

$$1+\frac{\frac{1}{n}\cdot\frac{k_n-k}{k}}{1+\frac{n-1}{2n}\,\frac{k_n-k}{k}}$$

oder

$$1+\frac{2\,(k_n-k)}{k_n\,(n-1)+k\,(n+1)}.$$

so daß man hat

$$p=\left(1+\frac{2\,(k_n-k)}{k_n\,(n-1)+k\,(n+1)}-1\right)100=\frac{k_n-k}{k_n\,(n-1)+k(n+1)}200.\text{*)}$$

Für die Durchmesser-, Flächen- und Massenzuwachsprocente werden, wenn man auf dieselben diese Näherungsformel anwendet, folgende Werthe erhalten:

$$p_D=\frac{D_n-D}{D_n\,(n-1)+D\,(n+1)}\,200,$$

$$p_G=\frac{G_n-G}{G_n\,(n-1)+G\,(n+1)}\,200,$$

$$p_V=\frac{V_n-V}{V_n\,(n-1)+V\,(n+1)}\,200.$$

Die Zahlenbeispiele der vorigen Paragraphen ergeben, mit diesen Formeln berechnet, folgende Werthe.

$$p_D=\frac{21{,}00-18{,}73}{21{,}00\cdot4+18{,}73\cdot6}\,200=\frac{2{,}27}{196{,}38}\,200=2{,}31,$$

$$p_G=\frac{1253{,}75-753{,}42}{1253{,}75\cdot9+753{,}42\cdot11}\,200=\frac{500{,}33}{19571{,}37}\,200=5{,}11,$$

$$p_V=\frac{0{,}251298-0{,}189687}{0{,}251298\cdot4+0{,}189687\cdot6}\,200=\frac{0{,}061611}{2{,}143314}\,200=5{,}75.$$

Nach den strengen Formeln wurde bezüglich 2,31; 5,21; 5,79 erhalten, so daß die Abweichungen nur 0,00; — 0,10; + 0,04 betragen.

---

*) Für k_n, k und n ergeben sich hieraus folgende Ausdrücke

$$k_n=\frac{200+p\,(n+1)}{200-p\,(n-1)}\,k,$$

$$k=\frac{200-p\,(n-1)}{200+p\,(n+1)}\,k_n,$$

$$n=\frac{k_n-k}{k_n+k}\;\frac{200+p}{p}.$$

Zu ähnlichen, wenn auch weniger genauen Formeln ist Preßler auf folgendem Wege gelangt.*) Wächst ein Kapital in n Jahren von k auf k_n, so ist sein durchschnittlicher jährlicher Zuwachs $\frac{1}{n}\left(k_n - k\right)$, sein mittlerer Werth aber $\frac{1}{2}\left(k_n + k\right)$. Bei p Procent Zinsen hat man daher

$$\frac{1}{2}\left(k_n + k\right)\frac{p}{100} = \frac{1}{n}\left(k_n - k\right)$$

und daraus

$$p = \frac{k_n - k}{k_n + k}\,\frac{200}{n}.$$

Führt man in diese Formel die Größen D_n und D, G_n und G, V_n und V ein, so erhält man

$$p_D = \frac{D_n - D}{D_n + D}\cdot\frac{200}{n},$$

$$p_G = \frac{G_n - G}{G_n + G}\cdot\frac{200}{n},$$

$$p_V = \frac{V_n - V}{V_n + V}\cdot\frac{200}{n}.$$

Mit den oben gebrauchten Zahlen wird dann

$$p_D = \frac{21{,}00 - 18{,}73}{21{,}00 + 18{,}73}\cdot\frac{200}{5} = \frac{2{,}27}{39{,}73}\cdot 40 = 2{,}29,$$

$$p_G = \frac{1253{,}75 - 753{,}42}{1253{,}75 + 753{,}42}\cdot\frac{200}{10} = \frac{500{,}33}{2007{,}17}\cdot 20 = 4{,}99,$$

$$p_V = \frac{0{,}251298 - 0{,}189687}{0{,}251298 + 0{,}189687}\cdot\frac{200}{5} = \frac{0{,}061611}{0{,}440985}\cdot 40 = 5{,}59.$$

Die Abweichungen von den wahren Werthen sind $-0{,}02$, $-0{,}22$, $-0{,}20$, also wesentlich größer als bei den von uns entwickelten Formeln, überdies sämmtlich negativ. Die Zuwachsprocente werden daher nach diesen Formeln zu klein erhalten**).

---

*) Neue holzwirthschaftliche Tafeln. S. 202.

**) Diese, schon von Preßler gemachte Bemerkung läßt sich für den Fall, daß k_n gegen k nicht allzu groß ist, wie folgt, beweisen.

Schreibt man $\sqrt[n]{\frac{k_n}{k}}$ in der Form

$$\sqrt[n]{1 + \frac{k_n - k}{k_n + k}\left(1 + \frac{k_n}{k}\right)}$$

so kann dieser Ausdruck nach dem binomischen Lehrsatze in eine Reihe entwickelt werden, wenn

$$\frac{k_n - k}{k_n + k}\left(1 + \frac{k_n}{k}\right) < 1,$$

§. 51.

Die Berechnung des Massenzuwachsprocentes am zuwachsrecht entwipfelten Stamme.

Wir haben oben §. 48. gesehen, daß die Volumina des früheren und des jetzigen Stammes bei zuwachsrechter Entwipfelung sich ausdrücken lassen durch $V = \frac{\pi}{4} \delta^2 H$ und $V_n = \frac{\pi}{4} \delta^2_n H$. Führt man diese Werthe in die Formel

$$p_V = \frac{V_n - V}{V_n + V} \cdot \frac{200}{n}$$

---

d. h. wenn

$$k_n < 2k$$

ist.

Dann erhält man, wenn im dritten Gliede für $\frac{k_n - k}{k_n + k}\left(1 + \frac{k_n}{k}\right)$ wieder $\frac{k_n - k}{k}$ gesetzt wird,

$$\sqrt[n]{\frac{k_n}{k}} = 1 + \frac{1}{n}\frac{k_n - k}{k_n + k}\left(1 + \frac{k_n}{k}\right) - \frac{1}{2n}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(\frac{k_n - k}{k}\right)^2 + \frac{1}{6n}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(2 - \frac{1}{n}\right)\left(\frac{k_n - k}{k}\right)^3 - \ldots$$

oder, wenn man im zweiten Gliede für $1 + \frac{k_n}{k}$ schreibt $2 + \frac{k_n - k}{k}$,

$$\sqrt[n]{\frac{k_n}{k}} = 1 + \left[\frac{2}{n}\frac{k_n - k}{k_n + k} + \frac{1}{n}\frac{(k_n - k)^2}{(k_n + k)k}\right] - \frac{1}{2n}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(\frac{k_n - k}{k}\right)^2 + \frac{1}{6n}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(2 - \frac{1}{n}\right)\left(\frac{k_n - k}{k}\right)^3 - \ldots$$

Da die Glieder dieser Reihe, vom dritten angefangen, abwechselnd das negative und positive Vorzeichen erhalten, und außerdem jedes Glied seinem absoluten Werthe nach kleiner ist als das vorhergehende, so wird die Summe aller Glieder vom dritten angefangen negativ und kleiner als dieses Glied, und zwar nach bekannten Sätzen gleich

$$-\frac{\rho}{2n}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(\frac{k_n - k}{k}\right)^2,$$

wo $0 < \rho < 1$, d. h. wo ρ ein positiver ächter Bruch. Damit wird

$$\sqrt[n]{\frac{k_n}{k}} = 1 + \frac{2}{n}\frac{k_n - k}{k_n + k} + \frac{1}{n}\frac{(k_n - k)^2}{k}\left[\frac{1}{k_n + k} - \frac{\rho}{2k} + \frac{\rho}{2nk}\right].$$

Das Aggregat $\frac{1}{k_n + k} - \frac{\rho}{2k} + \frac{\rho}{2nk}$ ist aber unter den von uns gemachten Voraussetzungen positiv, und daher $\sqrt[n]{\frac{k_n}{k}} > 1 + \frac{2}{n}\frac{k_n - k}{k_n + k}$. Daraus folgt aber

$$p > \left(1 + \frac{2}{n}\frac{k^n - k}{k_n + k} - 1\right)100 > \frac{k_n - k}{k_n + k} \cdot \frac{200}{n},$$

was zu beweisen war.

ein, so wird

$$p_v = \frac{\frac{\pi}{4}\delta^2{}_n H - \frac{\pi}{4}\delta^2 H}{\frac{\pi}{4}\delta^2{}_n H + \frac{\pi}{4}\delta^2 H} \cdot \frac{200}{n} = \frac{\delta^2{}_n - \delta^2}{\delta^2{}_n + \delta^2} \frac{200}{n}$$

d. h. bei zuwachsrechter Entwipfelung ist das Massenzuwachsprocent gleich dem Flächenzuwachsprocente der Mittenfläche.

Setzt man nun die Differenz $\delta_n - \delta$ oder den Durchmesserzuwachs gleich Δ, und den Quotienten $\frac{\delta_n}{\Delta}$, von Preßler*) relativer Durchmesser genannt, gleich q, so wird $\delta_n = \Delta q$, $\delta = \delta_n - \Delta = \Delta (q - 1)$ und damit

$$p_v = \frac{\Delta^2 q^2 - \Delta^2 (q-1)^2}{\Delta^2 q^2 + \Delta^2 (q+1)^2} \cdot \frac{200}{n} = \frac{q^2 - (q-1)^2}{q^2 + (q-1)^2} \cdot \frac{200}{n}.$$

Da für das oben §. 48. gebrauchte Beispiel $\delta_n = 16{,}50$ und $\delta = 14{,}54$ Cent ist, so hat man $\Delta = 16{,}50 - 14{,}54 = 1{,}96$ Cent, $q = \frac{16{,}50}{1{,}96} = 8{,}4$ und damit

$$p_v = \frac{70{,}6 - 54{,}8}{70{,}6 + 54{,}8} \cdot \frac{200}{5} = \frac{15{,}8}{125{,}4} \cdot 40 = 5{,}04 \text{ Procent.}$$

Zur Abkürzung dieser Rechnung hat Preßler eine Tafel**) gegeben, welche für eine Anzahl Werthe von $q = 2$ bis $q = 300$ den Bruch $\frac{q^2 - (q-1)^2}{q^2 + (q-1)^2}$ berechnet enthält, so daß man nach Berechnung des relativen Durchmessers q diesen nur in der Tafel aufzusuchen braucht, um daneben das zugehörige n-jährige Zuwachsprocent zu finden, aus welchem durch Division mit der Anzahl n der Jahre der Zuwachsperiode das jährliche erhalten wird. Sucht man beispielsweise in dieser Tafel $q = 9$, so findet sich daneben 23,5. Diese Zahl durch 5 dividirt, ergiebt als jährliches Zuwachsprocent 4,7.

Ueber die Anwendbarkeit des Preßler'schen Verfahrens können natürlich nur Versuche entscheiden. Eine Anzahl solcher haben wir selbst früher mitgetheilt***). Dieselben wurden an einer 99jährigen Tanne ausgeführt und zwar der Art, daß die Zuwachsprocente dieses Baumes zwischen dem 50. und 99. Jahre in Perioden von 5 zu 5 Jahren einmal nach dem Sektionsverfahren, das andere Mal aus der zuwachsrechten Mitte ermittelt wurde. Es ergaben sich folgende Zahlen.

---

*) Neue Holzwirthschaftliche Tafeln. S. 199.

**) I. Bd. 3. Abth. Taf. 23. u. a. O.

***) Krit. Blätt. 49. Bd. 2. H. S. 111.

Das Zuwachsprocent betrug

in den Lebensjahren	50-54	55-59	60-64	65-69	70-74	75-79	80-84	85-89	90-94	95-99
a) nach dem Sectionsverfahren	5,12	4,04	3,38	3,26	2,13	1,48	1,47	1,48	1,12	0,95
b) aus der zuwachs. Mitte berechnet	6,14	4,28	3,48	3,32	2,62	1,12	1,28	1,60	1,24	0,98
Differenz	+1,02	+0,24	+0,10	+0,06	+0,49	–0,36	–0,19	+0,12	+0,12	+0,03

Untersuchungen von Herndl und Kellner*) ergaben an vier Stämmen als Zuwachsprocent der letzten 10 Jahre

	am 1. Stamme (31 Sect.)	am 2. Stamme (25 Sect.)	am 3. Stamme (25 Sect.)	am 4. Stamme (28 Sect.)
a) nach dem Sectionsverfahren	2,0	2,1	2,7	2,1
b) aus der zuwachs. Mitte berechnet .	1,9	1,9	3,0	2,0
Differenz	–0,1	–0,2	+0,3	–0,1

§. 52.
Der Zuwachsbohrer.

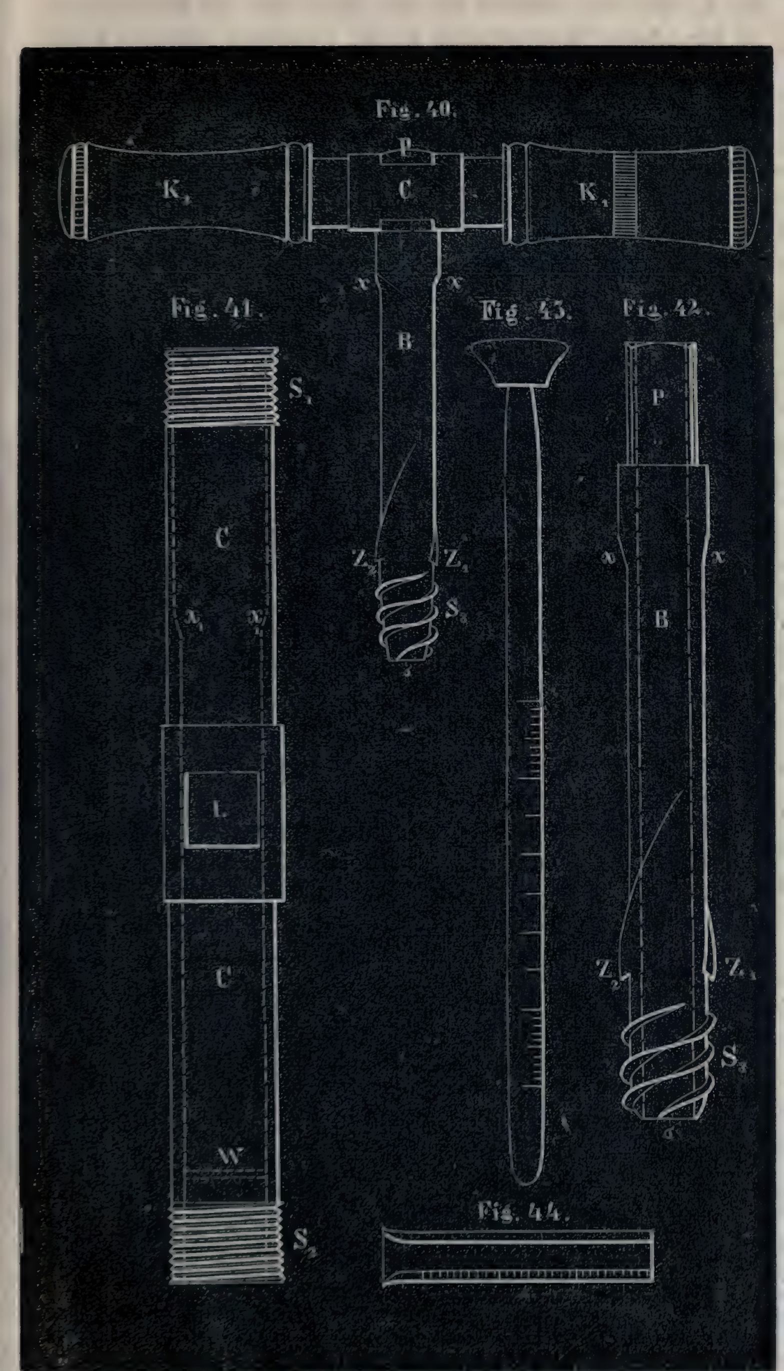
Mit dem im vorigen Paragraphen dargestellten abgekürzten Verfahren ist aber für die Zuwachsermittelung stehender Stämme noch nichts gewonnen. Dazu gehört vielmehr erstens eine Untersuchungsmethode, welche es möglich macht durch Messung des Zuwachses einer in erreichbarer Höhe liegenden Querfläche auf das Massenzuwachsprocent des Stammes zu schließen, dann ein Instrument, welches gestattet, dem Baume ohne allzubedeutende Verletzungen Theile der letzten Jahresringe zur Untersuchung zu entnehmen. Diese letztere Forderung wird durch Preßler's „Zuwachsbohrer" wohl in vollständig genügender Weise erfüllt.

Das genannte Instrument besteht in seiner neuesten Form**) aus einem 12,3 Cent langen, außen etwa 1,5, innen 1,2 Cent starken eisernen Hohlcylinder C (Fig. 40. u. 41.)***), der an beiden Enden auf 1 Cent Länge mit einem Schraubengewinde

*) Von Preßler mitgetheilt im Tharand. forstl. Jahrb. 21. B. S. 122.

**) Die älteste Form des Zuwachsbohrers ist beschrieben und abgebildet in „Der Waldbau des Nationalökonomen". Nation. Forstw. 5. Heft Dresden. 1865. S. 76." die verbesserte Form des Instrumentchens dagegen im Tharand. forstl. Jahrb. 17. Bd. S. 156. Von der oben beschriebenen Construction theilte Erfinder im August 1872 uns ein Exemplar mit.

***) Fig. 40 in $^2/_3$ der wirklichen Größe, Fig. 41 bis 44 in wirklicher Größe.


Fig. 40.
P
K
C
K
x
x
Fig. 41.
Fig. 43.
Fig. 42.
B
S
P
C
Z
Z
x
x
S
x
x
B
L
C
Z
Z
S
W
Fig. 44.
S

S_1 S_2 (Fig. 41.) versehen ist, und durch zwei auf diese Gewinde zu schraubende Messingkapseln K_1 K_2 (Fig. 40.) von etwa 5 Cent Länge geschlossen werden kann. Dadurch, daß diese Kapseln auf ihrer ganzen inneren Länge mit Schraubengängen versehen sind, ist es möglich, den Cylinder C bis auf etwa 20 Cent zu verlängern. In der Mitte seiner Länge hat der Cylinder C eine Durchbohrung L (Fig. 41.) von quadratischem Querschnitt und 0,95 Cent Seitenlänge, in welche der obere 1,5 Cent lange parallelepipedische Theil P (Fig. 40. u. 42.) des eigentlichen Bohrers hineinpaßt. Dieser Bohrer B (Fig. 40. u. 42.), ein stählerner, theils cylindrischer, theils kegelförmiger Körper von 10,2 Cent Länge, ist mit einer kegelförmigen Durchbohrung versehen, welche an dem vorderen in eine Schneide zugeschärften Ende 0,6 Cent Weite hat, nach hinten zu jedoch sich auf 0,7 Cent erweitert, damit der Bohrspan sich nicht an die innere Wandung des Bohrers anlegen und beim Drehen des letzteren zerreißen kann. Außen ist der Bohrer bei $x\,x$ (Fig. 40. u. 42.) halsförmig verjüngt, dann nach der Spitze zu cylindrisch und nur vorn auf einer Länge von 1,7 Cent kegelförmig, so daß, wie schon erwähnt, der vordere Rand in eine kreisförmige Schneide σ (Fig. 40. u. 42.) von 0,6 Cent Durchmesser ausläuft. Außerdem ist dieser vordere kegelförmige Theil auf 1,4 Cent Länge mit einem zweigängigen Schraubengewinde S_3 (Fig. 40. u. 42.) von 0,9 Cent Ganghöhe versehen. Etwa 0,5 Cent über dem Gewinde sind zwei einander diametral gegenüber stehende, mit entsprechenden 2,5 Cent langen Räumergewinden versehene spitze Ausweitungszähne oder Räumer Z_1 Z_2 angebracht, um den Druck des Stammes auf die äußere Wand des Bohrers zu vermindern.

Beim Nichtgebrauche wird der Bohrer B in dem Cylinder C aufbewahrt, und durch die Kappe K, welche des leichteren Erkennens wegen mit einem gerieften Ringe versehen ist, vor dem Herausfallen geschützt. Der Cylinder C ist übrigens bei etwa 11 Cent seiner Länge durch eine Querwand W (Fig. 41.) in zwei Kammern getheilt, von denen die eine, wie schon erwähnt, den Bohrer aufnimmt. Die Form des Bohrers und der Ausbohrung des Cylinders C bedingen, daß die Schneide σ nicht an die Querwand W stoßen und sich dadurch abstumpfen kann. Die kegelförmige Verjüngung des Bohrers bei $x\,x$ (Fig. 40. u. 42.) legt sich nämlich an eine entsprechend gestaltete Verjüngung x_1 x_1 (Fig. 41.) der Ausbohrung des Cylinders C an.

Die zweite kleinere Kammer ist dazu bestimmt, etwas Fett oder Talg aufzunehmen, um das Instrument nach dem Gebrauche, zuweilen auch während desselben, einfetten zu können.

Ferner findet in der Ausbohrung des Bohrers eine 11 Cent

lange Lancette oder Nadel (Fig. 43.) Platz. Auf der einen, platten, Seite derselben sind flache Zähne eingefeilt, während die andere, glatte, Seite mit einem Millimetermaßstabe versehen ist. Durch den durchbohrten Kopf dieser Nadel endlich wird ein Bindfaden gezogen und an einem Knopfe befestigt, um das Verlieren der Nadel zu verhüten.

§. 53.
Fortsetzung.

Beim Gebrauche werden der Bohrer und die Nadel dem Cylinder C entnommen. Der letztere wird dann durch die Messingkapseln K_1 K_2 verlängert, der Bohrer in die Oeffnung L eingeschoben, so daß der Cylinder C den Griff des Bohrers bildet*), und das Instrument mit der Schneide σ an den Punkt angesetzt, an welchem man dem Baume einen Span entnehmen will, und zwar muß dieses Ansetzen senkrecht zur Axe des Baumes geschehen. Hierauf drückt man den Bohrer möglichst stark gegen den Stamm und dreht denselben vorsichtig und fest, besonders mit möglichster Vermeidung des Wankens von links nach rechts, d. h. uhr- oder sonnenläufig, bis die Räumerzähne in den Stamm gedrungen sind. Dann kann man rasch bis zu der gewünschten Tiefe weiter drehen. Hierauf schiebt man die Lancette oder Nadel zwischen den Span und Bohrer ein, so daß die gezähnte Seite der Nadel auf den Span zu liegen kommt, nachdem man vorher durch Probiren den Ort aufgesucht hat, an welchem die Nadel am besten eindringt. Auch darf man die letztere nicht durch starken Druck, sondern nur durch sanftes Klopfen bewegen. Durch die eingestoßene Nadel wird der Bohrspan gegen die Wand des Bohrers gepreßt und außerdem noch durch die Zähne festgehalten, so daß, wenn der Bohrer rückwärts gedreht wird, der Span von dem Holzkörper abreißen muß, was sich am Mitdrehen des Nadelkopfes kenntlich macht. Ist dieses Abreißen des Spanes bewirkt, so wird die Nadel sammt dem Bohrspane mit dem Griffe des Bohrers herausgezogen. Bei Hölzern, wo der Bohrspan leicht zerbricht (kranke, gefrorene Stämme 2c.), ist es besser, die Nadel nicht einzuschieben, den Bohrer vielmehr ganz zurückzudrehen und den Span, der auch ohne Nadel meistens in dem Bohrer bleiben wird, aus dem letzteren mit der Nadel von hinten nach vorn herauszustoßen.

Die Bohrlöcher verschließt man an lebenden Stämmen zweckmäßig mit Harz, Baumwachs 2c., um den Zutritt der Luft zu verhindern.

---

*) Fig. 40. zeigt das zum Bohren vorbereitete Instrument.

Nach dem Gebrauche ist der Bohrer gut abzutrocknen und etwas einzufetten. Dieses Einfetten muß bei sehr harten Hölzern auch vor dem Bohren geschehen.

Zur Messung der Jahrringbreiten bedient man sich entweder des auf der glatten Seite der Klemmnadel eingerissenen Millimetermaßstabes, oder eines Maßröhrchens, welches dem Bohrer beigegeben ist. Es ist dies eine oben aufgeschnittene cylindrische Blechhülse (Fig. 44.) von etwas größerem Durchmesser als der Bohrspan, welche an dem einen Rande des Aufschnittes eine Millimetertheilung trägt. Will man mit dieser Röhre Zuwachsbreiten messen, so hat man den Bohrspan in das Röhrchen einzuschieben, den Anfang des Jahrringes mit einem Theilstriche zum Zusammenfallen zu bringen und die Jahrringbreite an dem Maßstabe abzulesen. Besser noch ist es, zum Messen ein fein getheiltes kleines Maßstäbchen von Metall oder Elfenbein anzuwenden.

Um die Jahrringgrenzen deutlich erkennen zu können, ist es nöthig, den Bohrspan mit einem scharfen Messer gut zu glätten, und beim Anlegen des Maßstabes und zum Ablesen des Maßes sich einer scharfen Lupe zu bedienen. Bei einigen Laubhölzern muß man aber außerdem noch zu chemischen und physikalischen Hülfsmitteln seine Zuflucht nehmen, und den geglätteten Span entweder mit Eisenchlorid, welches die Gerbsäure grünlich färbt, oder mit durch Anilin roth gefärbten Weingeist bestreichen. Durch das erstere Reagens werden die Jahresringe deshalb deutlicher hervortreten, weil die Gerbsäure im Frühjahrs- und Herbstholze ungleich vertheilt ist; durch das zweite, weil das wasserreichere Frühjahrsholz den Weingeist stärker aufsaugt, sich also intensiver roth färbt, als das Herbstholz. Aeußersten Falls müßte man noch von dem gefärbten Holze papierdünne Schnitte nehmen und diese gegen das Licht halten.

Für regelmäßig geformte Stammpartien genügen zwei sich diametral gegenüberstehende Bohrungen. Sollte man die Jahrringe in schiefer Richtung durchbohrt haben, so braucht man den Maßstab nur senkrecht gegen die Jahrringgrenzen anzulegen. Um aber an unregelmäßigen Stammpartien mit zwei Bohrungen genügend genaue Resultate zu erhalten, giebt Preßler die Vorschrift, man solle aus wenigstens vier Kreuzmessungen die durchschnittliche Größe des Durchmessers bestimmen, und dann an zwei solchen Punkten bohren, deren Abstand diesem Mittel entspricht. Die Messung des Zuwachses hat dann aber nicht normal zu den Jahrringen, sondern längs des Spanes zu erfolgen. Diese Regel gründet sich auf die zumeist wohl auch gegründete Voraussetzung,

daß bei nicht zu langen Zuwachsperioden die frühere Fläche als der jetzigen ähnlich angesehen werden darf.

§. 54.

Die Ermittelung des Massenzuwachsprocentes stehender Stämme aus der Grundstärke.

Würden sich die Massengehalte des jetzigen und des früheren Stammes verhalten wie die (oberhalb des Wurzelanlaufes) gemessenen Grundflächen dieser Stämme, so würde das Massenzuwachsprocent dieser Stämme nach §. 51. gefunden werden zu

$$p_v = \frac{q^2 - (q-1)^2}{q^2 + (q-1)^2} \frac{200}{n} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 1)$$

Dieser Fall würde unter Anderen*) dann eintreten, wenn zugleich weder Höhen- noch Formzuwachs stattfände, ein Fall, der aber nahezu unmöglich ist. Die Gleichung 1) wird daher die unterste Grenze angeben, bis zu welcher das Zuwachsprocent höchstens herabsinken kann.

Da, wenn V das Volumen des früheren, V_n das des jetzigen Stammes ist,

$$V = \frac{\pi}{4} D^2 Hf \text{ und } V_n = \frac{\pi}{4} D_n^2 H_n f_n,$$

so ist

$$V : V_n = D^2 : Hf \quad D_n^2 \quad H_n f_n.$$

Findet nun zwar ein Höhenzuwachs statt, bleibt aber die Form des Baumes dieselbe, ist also $f_n = f$, und läßt man die Größen D, D_n mit H, H_n durch die Relation

$$D : D_n = H : H_n$$

---

*) Aus den Gleichungen

$$V = \frac{\pi}{4} D^2 Hf \text{ und } V_n = \frac{\pi}{4} D_n^2 H_n f_n$$

in welchen D, H, f Durchmesser, Höhe und Formzahl des früheren, D_n, H_n, f_n dieselben Größen am jetzigen Stamme bedeuten, folgt

$$V : V_n = D^2 H f : D_n^2 H_n f_n.$$

Soll nun noch außerdem die Gleichung stattfinden

$$V : V_n = D^2 : D_n^2,$$

so muß auch

$$D^2 : D_n^2 = D^2 H f : D_n^2 H_n f_n$$

sich verhalten, oder es muß

$$H f = H_n f_n$$

sein, woraus sich die Proportion

$$H : H_n = f_n : f$$

ergiebt, d. h. die Volumina zweier Stämme verhalten sich auch dann wie ihre Grundflächen, wenn sich die unechten Formzahlen dieser Stämme umgekehrt verhalten wie die Höhen derselben.

verbunden sein, so wird

$$H_n = \frac{D_n}{D} H$$

und damit

$$V : V_n = D^3 : D_n^3.$$

Dann erhält man

$$p = \frac{D_n^3 - D^3}{D_n^3 + D^3} \cdot \frac{200}{n},$$

woraus nach dem in §. 51. angegebenen Verfahren hervorgeht

$$p = \frac{q^3 - (q-1)^3}{q^3 + (q-1)^3} \cdot \frac{200}{n}.$$

Längs des unbeasteten Theiles des Baumschaftes (von Preßler im Besonderen Schaft genannt, während der beastete Theil von ihm als Zopf unterschieden wird,) ist der Durchmesserzuwachs demjenigen der Grundstärke mindestens gleich, meistens aber größer als dieser. Es findet daher längs dieses unbeasteten Theiles ein Formzuwachs und damit eine Vergrößerung der Formzahl statt. Es kann deshalb durch die Gleichung $p = \frac{q^3 - (q-1)^3}{q^3 + (q-1)^3}$ noch nicht der größte Werth ausgedrückt sein, welchen das Zuwachsprocent in der Natur zu erreichen vermag. Preßler hat denn auch in seinen Tafeln*) als Maximalgrenze für p vielmehr den Werth $\frac{q^{3\frac{1}{3}} - (q-1)^{3\frac{1}{3}}}{q^{3\frac{1}{3}} + (q-1)^{3\frac{1}{3}}}$ angenommen.

Preßler hat nun nicht nur die Größen $\frac{q^2 - (q-1)^2}{q^2 + (q-1)^2}$ und $\frac{q^3 - (q^3-1)^3}{q^3 + (q^3-1)^3}$ für eine große Anzahl Werthe von q zwischen 2 und 300 berechnet, sondern auch zwischen dieselben noch durch einfache arithmetische Interpolation zwei Zahlenreihen eingeschoben, welche ungefähr den Größen $\frac{q^{2\frac{1}{3}} - (q-1)^{2\frac{1}{3}}}{q^{2\frac{1}{3}} + (q-1)^{2\frac{1}{3}}}$ und $\frac{q^{2\frac{2}{3}} - (q-1)^{2\frac{2}{3}}}{q^{2\frac{2}{3}} + (q-1)^{2\frac{2}{3}}}$ entsprechen. Derselbe hat ferner durch Zuzählung des dritten Theiles der Differenz der beiden obigen Werthe zu $\frac{q^3 - (q-1)^3}{q^3 + (q-1)^3}$ eine dem Maximalwerthe $\frac{q^{3\frac{1}{3}} - (q-1)^{3\frac{1}{3}}}{q^{3\frac{1}{3}} + (q-1)^{3\frac{1}{3}}}$ nahekommende Größe erhalten, und auf diese Weise überhaupt fünf, von Höhenwuchs und Kronenansatz abhängige Zuwachsabstufungen unterschieden.**)

Die erste oder unterste Stufe ist, wie schon erwähnt, durch

---

*) Zur Forstzuwachskunde. Ration. Forstw. 7. H. S. 76 u. 77. — Forstliches Hülfsbuch. Taf. 23. unter der Bezeichnung „n jähriges Massenzuwachsprocent rückwärts“.

**) I. Bd. 3. Abth. Taf. 24. u. a. O.

fehlenden Höhen- und Formzuwachs charakterisirt und nur sehr selten vorkommend; die oberste oder fünfte Stufe dagegen ist entweder durch eine bei 0,7 bis 0,8 der Baumhöhe angesetzte Krone und der Grundstärke proportionalen (vollen) Höhenwuchs oder bei etwas niedriger angesetzter Krone durch etwas stärkeren Höhenwuchs gekennzeichnet. Zwischen diese beiden Stufen sind die drei übrigen einzuschieben und nach Höhenwuchs und Kronenansatz gutachtlich anzusprechen.

Als Rechnungsbeispiel mag die oben von uns schon mehrfach benutzte Kiefer dienen. Dieselbe ergab bei 1,8 Meter über dem Boden eine durchschnittliche Breite der letzten fünf Jahresringe von 2,05 Cent, die Rindendicke zu 1,5 Cent, den Durchmesser gleich 21,05 Cent. Es ist mithin $D_n = 21{,}05 - 1{,}50 = 19{,}55$ Cent, $D = 19{,}55 - 2{,}05 = 17{,}50$ Cent, $q = 19{,}55 : 2{,}05 = 9{,}5$. Die Höhe des Kronenansatzes befand sich bei 0,4 der jetzigen Höhe, also ziemlich tief, der Höhenzuwachs war als nahezu proportional dem Durchmesserzuwachs zu bezeichnen, so daß dieser Baum in die Zuwachsklasse III. einzureihen war. Es findet sich aber beim relativen Durchmesser 9,5 in Klasse III. das 5jährige Zuwachsprocent 29, mithin das laufend jährliche 29 : 5 = 5,8. Oben, §. 49., haben wir aus der Sectionscubirung das Zuwachsprocent gleich 5,79 gefunden, so daß beide Resultate hier genau übereinstimmen.

Untersuchungen über den Genauigkeitsgrad, welcher durch die Untersuchung des Grundflächenzuwachses im Massenzuwachsprocente zu erreichen ist, sind von uns selbst*) an der schon oben §. 51. erwähnten Tanne ausgeführt worden. Der in die Stufe IV. gehörige Baum ergab als Zuwachsprocent

in den Lebensjahren	50-54	55-59	60-64	65-69	70-74	75-79	80-84	85-89	90-94	95-99
a) nach dem Sectionsverfahren	5,12	4,04	3,38	3,26	2,13	1,48	1,47	1,48	1,12	0,95
b) aus dem Zuwachse d. 1,7 Meter über d. Boden gelegenen Fläche	4,20	3,40	2,60	3,00	2,20	1,26	1,14	1,24	1,10	0,88
Differenz	–0,92	–0,64	–0,78	–0,26	+0,07	–0,22	–0,33	–0,24	–0,02	–0,07

Die verhältnißmäßig große Differenz der drei ersten Altersstufen ist ohne Zweifel darin zu suchen, daß während dieser Zeit

*) Krit. Bl. 49. Bd. 2. H. S. 111.

die untersuchte Tanne in die Zuwachsstufe V. zu setzen gewesen wäre. Dann würde man als Zuwachsprocente 4,60, 3,80, 3,00 erhalten haben und die Differenzen mit dem wahren Zuwachsprocente würden nur noch —0,52, —0,24, —0,38 betragen. Untersuchungen von Herndl und Kellner*) zeigten, daß unter 100 Stämmen, welche zuerst an der Grundfläche und dann nach dem Fällen in der zuwachsrechten Mitte auf ihr Zuwachsprocent während der letzten Jahre untersucht wurden, nur zwei sich befanden, wo beide Resultate um 0,6 und nur fünf, wo beide Resultate um 0,5 Procent von einander abwichen. Im Mittel ergab die erste Methode an 100 Stämmen 2,22, die zweite 2,21 Procent Massenzuwachs.

Das aus dem Grundflächenzuwachse ermittelte Zuwachsprocent des Schaftes kann übrigens bei mittelalten und alten Hölzern als Zuwachsprocent des ganzen Baumes, Schaft und Krone zusammengenommen, gelten, weil, wenn mit zunehmender Höhe das Verhältniß des Kronenansatzes zur Schaftlänge dasselbe bleibt, auch die Astmasse ihr Verhältniß zur Schaftmasse nicht ändert (s. §. 34. Das Gesetz der Astmasse).

§. 55.

Die Schätzung des künftigen Massenzuwachses und der Procentziffer desselben.

Während unsere bisherigen Untersuchungen, wenn sie sich auch zum Theil auf Näherungsmethoden stützten, doch immerhin noch auf dem Boden wirklicher Messungen fußten, indem die Größen D, D_n und damit q mit aller Schärfe gemessen, Höhenwachsthum und Kronenansatz und damit die Zuwachsstufe mit Leichtigkeit geschätzt werden konnten, müssen wir zum Theil diesen sicheren Boden verlassen und uns mit nur wahrscheinlichen Werthen begnügen, sobald wir daran gehen, die Masse des in kürzerer oder längerer Zeit erfolgenden Zuwachses und das Zuwachsprocent dieser wahrscheinlichen Massenmehrung zu bestimmen. Hier ist die einzige untrügliche Basis, auf welcher wir weiter schließen können, der bis jetzt erfolgte Zuwachs und dessen Procentziffer.

Als Leitfaden bei derartigen Schätzungen kann wenigstens der Satz dienen, daß, wenn nicht besondere wirthschaftliche Maßregeln vorgenommen werden, welche den Durchmesser-Höhen- und Formzuwachs oder wenigstens einen dieser Factoren ganz wesentlich beeinflussen, die Procentziffer des in der künftigen n jährigen Periode erfolgenden Massenzuwachses kleiner sein wird als die des Massenzuwachses der vorhergenden n jährigen Periode.

*) Tharand. forstl. Jahrb. 21. Bd. S. 118.

Bezeichnet nun V_{n_1} die Masse des künftigen, V_n die des jetzigen Stammes, so ist das künftige Massenzuwachsprocent

$$p'_v = \frac{V_{n_1} - V_n}{V_{n_1} + V_n} \cdot \frac{200}{n_1}.$$

Macht man für V_{n_1} und V_n dieselben Voraussetzungen, die wir oben für V_n und V gemacht haben, so wird die unterste Stufe des Zuwachses wieder diejenige, bei welcher sich diese Volumina verhalten wie die Quadrate der Grundflächen, wodurch dann die obige Gleichung übergeht in

$$p'_v = \frac{D^2_{n_1} - D^2_n}{D^2_{n_1} + D^2_n} \frac{200}{n_1}.$$

Setzt man $D_{n_1} - D_n = \Delta_1$ und $D_n : \Delta_1 = q_1$, so wird $D_n = \Delta_1 q_1$, $D_{n_1} = \Delta_1 (q_1 + 1)$ und damit

$$p'_v = \frac{(q_1 + 1)^2 - q_1^2}{(q_1 + 1)^2 + q_1^2} \frac{200}{n_1}.$$

Ganz ebenso wie früher erhält man bei vollem Höhenwuchse (Zuwachsstufe IV.), d. h. wenn der Durchmesserzuwachs proportional ist dem Höhenzuwachse, als Procentziffer des Massenzuwachses

$$p'_v = \frac{(q_1 + 1)^3 - q_1^3}{(q_1 + 1)^3 + q_1^3} \frac{200}{n_1},$$

und durch einfache arithmetische Interpolation zweier weiteren Stufen zwischen I. und IV. die Zuwachsclassen II. und III., welche ungefähr den Werthen

$$\frac{(q_1 + 1)^{2^1/_3} - q^{2^1/_3}}{(q_1 + 1)^{2^1/_3} + q^{2^1/_3}} \text{ und } \frac{(q_1 + 1)^{2^2/_3} - q_1^{2^2/_3}}{(q_1 + 1)^{2^2/_3} + q_1^{2^2/_3}}$$

entsprechen, sowie durch Zufügung des dritten Theiles der Differenz von I. und IV. zu IV. das Zuwachsmaximum oder Classe V., welche dem Werthe

$$\frac{(q_1 + 1)^{3^1/_3} - q_1^{3^1/_3}}{(q_1 + 1)^{3^1/_3} + q_1^{3^1/_3}}$$

nahe kommt.

Preßler hat auch die Ausdrücke $\frac{(q_1 + 1)^2 - q_1^2}{(q_1 + 1)^2 + q_1^2} 200, \ldots$ für eine größere Anzahl zwischen 2 und 300 gelegener Werthe von q_1 berechnet.*)

Hat man nach der Messung des jetzigen Durchmessers und des früheren Durchmesserzuwachses und nach Erwägung, ob dieser Zuwachs auch ferner zu erwarten, zu vermehren oder zu vermindern sei, den relativen Durchmesser q_1 berechnet, die Zuwachsstufe geschätzt und daraus p'_v erhalten, so läßt sich

*) Zur Forstzuwachskunde. Nation. Forstw. 7. H. S. 76 u. 77. — Forstliches Hülfsbuch. Taf. 23. unter der Bezeichnung „n jähriges Massenzuwachsprocent vorwärts."

dann auch der künftige Massengehalt V_n berechnen. Denn aus der Gleichung

$$p_v = \frac{V_{n_1} - V_n}{V_{n_1} + V_n} \cdot \frac{200}{n_1}$$

folgt nach einer leichten Transformation

$$V_{n_1} = V_n \cdot \frac{200 + n_1 p}{200 - n_1 p}.$$

Könnte man, um das Beispiel des §. 54. beizubehalten, voraussetzen, daß die dort behandelte Kiefer auch im nächsten Jahrfünft einen Durchmesserzuwachs von 2,05 Cent erführe, und daß sich auch sonst die Verhältnisse nicht änderten, die Zuwachsstufe also dieselbe bliebe, so würde $q_1 = 19{,}55 : 2{,}05 = 9{,}5$ und damit nach der Tafel das fünfjährige Massenzuwachsprocent gleich 27, das einjährige gleich $27 : 5 = 5{,}4$. Träte dagegen der Stamm bei dem relativen Durchmesser 9,5 in die Wuchsclasse IV., so wäre das fünfjährige vorwärts liegende Zuwachsprocent 30, das einjährige somit 6,0.

Da die jetzige Masse des Schaftes dieser Kiefer 0,251298 Cubicmeter beträgt, so würde diese Masse unter der ersten Voraussetzung nach fünf Jahren auf

$$0{,}251298 \cdot \frac{200 + 5 \cdot 5{,}4}{200 - 5 \cdot 5{,}4} = 0{,}251298 \frac{227}{173} = 0{,}329738$$

Cubicmeter anwachsen, nach der zweiten dagegen auf

$$0{,}251298 \cdot \frac{200 + 5 \cdot 6}{200 - 5 \cdot 6} = 0{,}251298 \cdot \frac{230}{170} = 0{,}339991$$

Cubicmeter.

Zweites Capitel.

Die Berechnung des Zuwachses ganzer Bestände.

§. 56.

Die Berechnung des Zuwachsprocentes ganzer Bestände.

1. Wenn auch, wie wir weiter oben gesehen haben, aus der Masse des mittleren Modellstammes die Masse des Bestandes gefunden werden kann, so ist es doch durchaus unstatthaft, von dem jetzigen Zuwachse dieses Modellstammes auf den Zuwachs des Bestandes zu schließen, weil dieser mittlere Modellstamm nicht in die herrschende Stärkestufe, sondern vor dieselbe fällt. Noch

viel weniger aber darf man annehmen, daß der Zuwachsgang dieses Modellstammes mit demjenigen des Bestandes übereinstimme, da dieser mittlere Modellstamm nicht in jeder Lebensperiode Modellstamm für den Bestand ist. Es bleibt, um den während einer nicht allzu langen Zeit am Bestande erfolgten Zuwachs zu finden, nichts übrig, als Stärkeklassen zu bilden, die mittleren Modellstämme dieser Klassen aufzusuchen, und aus dem Massengehalte und Zuwachse dieser Klassenmodellstämme den Massengehalt und Zuwachs der einzelnen Klassen und damit des ganzen Bestandes zu bestimmen.

Wären beispielsweise $V_0, V_1, V_2, \ldots$ die Massen der Klassenmodellstämme, $n_0, n_1, n_2 \ldots$ die in den einzelnen Stärkeklassen vorkommenden Stammzahlen, so hätte man für den jetzigen Inhalt M_n des Bestandes den Ausdruck

$$M_n = V_0 n_0 + V_1 n_1 + V_2 n_2 + \ldots.$$

Sind nun die Zuwachsprocente der Modellstämme während der letzten n Jahre $p_0, p_1, p_2 \ldots$, so erhält man den Inhalt $V'_0, V'_1, V'_2 \ldots$ der Modellstämme vor n Jahren, wenn man denselben nicht unmittelbar durch Sectionscubirung ermittelt, zu

$$V_0' = \frac{V_0}{1{,}op_0^{\,n}},\ V_1' = \frac{V_1}{1{,}op_1^{\,n}},\ V_2' = \frac{V_2}{1{,}op_2^{\,n}}, \ldots$$

oder genähert zu

$$V_0' = \frac{200 - np_0}{200 + np_0} V_0,\ V_1' = \frac{200 - np_1}{200 + np_1} V_1,$$

$$V_2' = \frac{200 - np_2}{200 + np_2} V_2, \ldots$$

und damit den Inhalt M des Bestandes vor n Jahren

$$M = V'_0 n_0 + V'_1 n_1 + V'_2 n_2 + \ldots.$$

Dieser Werth von M kann zwar nur annähernd richtig sein, weil die jetzigen Modellstämme vor n Jahren nicht als solche sich ergeben haben würden, doch wird, wenn n nicht sehr groß, der Fehler nicht sehr bedeutend sein. Mit den für M_n und M gefundenen Werthen ergiebt sich dann das Zuwachsprocent des ganzen Bestandes zu

$$p_M = \left(\sqrt[n]{\frac{M_n}{M}} - 1\right) 100,$$

oder genähert zu

$$p_M = \frac{M_n - M}{M_n + M} \cdot \frac{200}{n}.$$

Dieses Verfahren ist scheinbar äußerst zeitraubend. Wenn aber die Masse der haubaren Bestände, und um solche wird es sich bei Zuwachsuntersuchungen meistens handeln, überhaupt durch

stammweise Aufnahme und Klassenmodellstämme ermittelt wird, so tritt zu den für diese Aufnahme nöthigen Arbeiten nur die Untersuchung des Zuwachses der Klassenmodellstämme hinzu.

Als Rechnungsbeispiel mögen die bei einer kleinen Untersuchung gewonnenen Zahlen dienen. In einem etwa 80jährigen Bestande wurden die Durchmesser bei 1,5 Meter Höhe über dem Boden gemessen und vier Stärkeklassen gebildet. Von diesen Klassen enthielt

			Durchmesser			Inhalt	
die erste	76	Stämme von	8—16	Cent	mit	13,4902	Cubicmeter
„ zweite	165	„ „	17—21	„	„	41,8091	„
„ dritte	125	„ „	22—26	„	„	60,8410	„
„ vierte	78	„ „	27—38	„	„	62,8228	„

Der Inhalt des Bestandes betrug daher 178,9631 Cubicmeter. Durch Untersuchung bei 1,5 Meter über dem Boden fanden sich die Massenzuwachsprocente dieser Klassen während der letzten fünf Jahre bezüglich gleich 0,72 — 0,96 — 2,20 — 2,40. Mit diesen Zahlen wird nach der Preßler'schen Näherungsformel die Masse

der ersten	Klasse	vor	fünf	Jahren	gleich	13,0132 Cubicmeter,
„ zweiten	„	„	„	„	„	39,8492 „
„ dritten	„	„	„	„	„	54,4974 „
„ vierten	„	„	„	„	„	55,7108 „

also die Bestandesmasse vor fünf Jahren gleich 163,0706 Cubicmeter. Das Zuwachsprocent des ganzen Bestandes betrug somit

$$\frac{178{,}9631 - 163{,}0706}{178{,}9631 + 163{,}0706} \cdot \frac{200}{5} = 1{,}86.$$

Die stammweise Aufnahme hatte vor fünf Jahren die Bestandesmasse gleich 166,02 Cubicmeter ergeben, also nur um 2,95 Cubicmeter oder 1,8 Procent größer als die Berechnung aus den Zuwachsprocenten. Das wahre Zuwachsprocent des Bestandes ist folglich

$$\frac{178{,}96 - 166{,}02}{178{,}96 + 166{,}02} \cdot \frac{200}{5} = 1{,}50,$$

um 0,36 von dem vorhin berechneten abweichend.

2. Wenn freilich die Bestimmung der Bestandesmasse durch Ocularschätzung erfolgt, so ist das eben gegebene Verfahren der Zuwachsermittelung der Bestände nicht anwendbar. In diesem Falle muß man die Zuwachsprocente einer großen Anzahl von Stämmen der herrschenden Stammklassen untersuchen, und das Mittel dieser einzelnen Zuwachsprocente als Zuwachsprocent des Bestandes ansehen. Hätte man also m Stämme untersucht mit

den Zuwachsprocenten p′, p″, p‴, …, so wäre das Zuwachsprocent des Bestandes

$$p = \frac{1}{m}(p' + p'' + p''' + \ldots .).$$

In unserem obigen Beispiele fallen die herrschenden Stammstärken zwischen 17 und 26 Cent. Hätte man daher als Mittel der Zuwachsprocente der schwächeren Stämme (von 17—21 Cent) 0,96 Procent, als Mittel der stärkeren (von 22—26 Cent) 2,20 Procent gefunden, so würde, da die Stammzahlen beider Stärkeklassen nahe gleich, das Zuwachsprocent des Bestandes

$$\frac{1}{2}(0{,}96 + 2{,}20) = 1{,}58$$

sein.

Untersuchungen über die Genauigkeit, welche sowohl mit der obigen strengen, als mit dieser abgekürzten Methode in der Bestimmung der Zuwachsprocente der Bestände zu erreichen ist, liegen nicht vor.*)

3. Soll der künftige Zuwachs eines Bestandes bestimmt werden, so sind bei den untersuchten Modellstämmen dieselben Erwägungen zu machen, welche wir oben S. 241 bei der Ermittelung des künftigen Zuwachses einzelner Stämme angegeben haben. Es ist nämlich zu überlegen, ob der Zuwachs dieser Modellstämme in den nächsten n Jahren als fallend, dem jetzigen Zuwachse gleich bleibend oder als steigend angenommen werden kann.

Mit den für die Modellstämme gefundenen Zuwachsprocenten werden sodann die künftigen Massen der Stärkeklassen berechnet; die Summe der Massen dieser Stärkeklassen ergiebt die künftige Masse M_{n_1} des Bestandes.

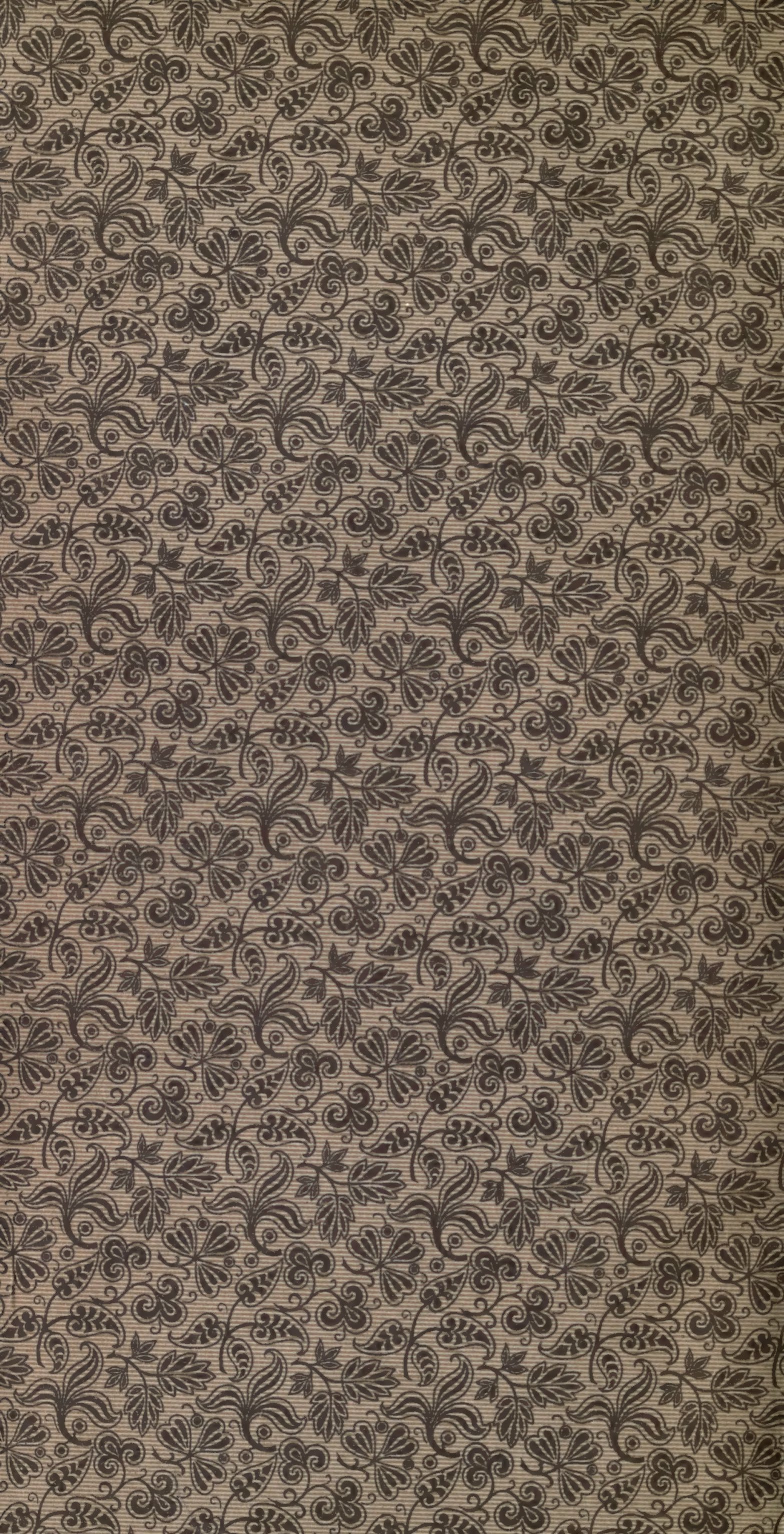
Das Zuwachsprocent des Bestandes in den nächsten n_1 Jahren folgt zu

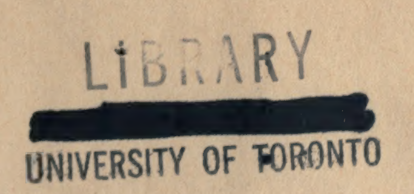
$$p'_M = \frac{M_{n_1} - M_n}{M_{n_1} + M_n} \cdot \frac{200}{n_1}.$$

*) Besitzt man für eine Gegend brauchbare Ertragstafeln, so kann man den Zuwachs der Bestände mit Hülfe dieser Tafeln häufig auch dann finden, wenn die zu untersuchenden Bestände nicht ganz normal sind, indem man aus den Angaben der Tafel die Zuwachsprocente berechnet und aus diesen und der jetzigen durch stammweise Aufnahme bestimmten Masse die um n Jahre vor- oder rückwärts liegende Masse ableitet.



Druck der Franz Krüger'schen Buchdruckerei, Berlin, Lindenstr. 40.




LIBRARY
[redacted]
UNIVERSITY OF TORONTO

